



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

علم ہند ستروی

(برائے انٹرمیڈیٹ)

تالیف

شیخ برکت علی صاحب ایم۔ اے

محمد خواجہ محی الدین صاحب ایم۔ اے

۱۳۵۵ھ ۱۳۳۲ھ ۱۹۳۶ء

طبع دارالعلوم دیوبند

فہرست مضامین

(علم ہندوستان مستوی)

صفحہ	مضمون
۱	پہلا باب - تمہید
۶	دوسرا باب - نسبت و تناسب
۱۱	امثلہ ۱
۲۳	امثلہ ۲
۳۰	امثلہ ۳
۳۲	امثلہ ۴
۴۲	امثلہ ۵
۴۷	امثلہ ۶
۵۰	امثلہ ۷
۵۱	تیسرا باب - مثلث کے خواص
۵۵	امثلہ ۸
۵۷	امثلہ ۹

صفحہ	مضمون
۶۲	امشہ ۱۰
۶۶	امشہ ۱۱
۷۳	امشہ ۱۲
۷۶	چوتھا باب - دائروں کے خواص
۷۷	امشہ ۱۳
۸۰	امشہ ۱۴
۸۸	امشہ ۱۵
۹۵	امشہ ۱۶
۱۰۲	امشہ ۱۷
۱۰۴	پانچواں باب - دائروں کا بنانا -
۱۰۵	امشہ ۱۸
۱۱۰	امشہ ۱۹
۱۱۳	چھٹا باب - اعظم اقل
۱۲۱	امشہ ۲۰
۱۲۳	ساتواں باب - جلیبی نسبت موسیقی صفا اور موسیقی فیصل
۱۲۵	امشہ ۲۱
۱۳۷	امشہ ۲۲

دیسپاچہ

علم ہندسہ مستوی

ہندسہ مستوی کا مختصر رسالہ حسب تصفیہ مجلس نصاب ریاضی جامعہ عثمانیہ کی انٹرمیڈیٹ کی جماعتوں کے لیے تالیف کیا گیا ہے۔ جہاں تاک ممکن تھا ہندسہ مستوی کے معینہ نصاب جدید کو ملحوظ رکھتے ہوئے اس رسالہ کو اپنی حدود کے اندر مکمل بنانے کی کوشش کی گئی ہے۔ اس مقصد کی تکمیل کے لیے چند دفعات جو علامت * سے نشان زد کی گئی ہیں مضمون کے تسلسل کو قائم رکھنے کے لیے نصاب سے زائد درج کی گئی ہیں مگر یہ دفعات ایسی ہیں کہ تقریباً جملہ طلباء ان کو آسان اور دلچسپ پائینگے۔ مناسب مشقوں کے انتخاب کی غرض سے متعدد مستند انگریزی کتابوں سے استفادہ کیا گیا ہے۔ مسائل پر مکمل طور پر حاوی ہونے کے لیے یہ ضروری ہے کہ طالب علم حتی الامکان مسائل کے متعلقہ مسئلہ میں مشقوں کی کافی تعداد کو حل کرنے کی بطور خود پوری پوری کوشش کرے۔ طالب علم کی سہولت کے نظر جہاں ضروری تصور کیا گیا مشقوں کے اشارے یا مکمل حل درج کر دیے گئے ہیں۔ فقط

المرقوم یکم آبان ۱۳۳۸ھ

شیخ برکت علی

محمد خواجہ محی الدین

علم ہندوستانی

پہلا باب

تہید

۱۔ اس باب میں بطور تہید ہم ایسے اہم مسائل درج کرتے ہیں جن سے طالب علم کو اس کتاب کے شروع کرنے سے پہلے واقف ہونا ضروری ہے۔ یہ تمام مسائل ثبوت اور توضیحی مثالوں کے ساتھ بالعموم علم ہندوستانی کی ان تمام درسی کتابوں میں پائے جاتے ہیں جو مدارس فوقانیہ میں استعمال ہوتی ہیں۔

۲۔ خطوط مستقیم۔

(۱) اگر ایک خط مستقیم ایک اور خط مستقیم سے ملے تو دو متصل زاویوں کا مجموعہ دو قائمے ہوتا ہے اور اس کا عکس۔

(۲) اگر دو خط ایک دوسرے کو قطع کریں تو مقابل کے زاویے مساوی ہوتے ہیں۔

(۳) اگر ایک قاطع دو خطوط کو کاٹے اور متبادل زاویے مساوی ہوں تو مؤخر الذکر دو خطوط متوازی ہونگے اور اس کا عکس۔

۳۔ مثلثات اور متوازی الاضلاع۔

- (۱) کسی مثلث کے تین زاویوں کا مجموعہ دو قائموں کے مساوی ہوتا ہے۔
- (۲) دو مثلث ایک دوسرے کے ہر طرح سے مساوی ہونگے اگر
- (ا) ایک مثلث کے دو ضلع دوسرے مثلث کے دو ضلعوں کے جُدا جُدا مساوی ہوں اور ان ضلعوں سے بننے والے زاویے بھی مساوی ہوں۔
- (ب) اگر ایک مثلث کے دو زاویے دوسرے مثلث کے دو زاویوں کے جُدا جُدا برابر ہوں اور ایک مثلث کا ایک ضلع دوسرے مثلث کے نظیر کے ضلع کے برابر ہو۔
- (ج) اگر ایک مثلث کے تین ضلع دوسرے مثلث کے تین ضلعوں کے جُدا جُدا برابر ہوں۔
- (۳) اگر ایک مثلث کے دو ضلع آپس میں مساوی ہوں تو اُن کے مقابل کے زاویے بھی مساوی ہونگے اور اس کا عکس۔
- (۴) اگر دو قائم الزاویہ مثلثوں میں ایک کا وتر اور ایک ضلع دوسرے کے وتر اور ایک ضلع کے بالترتیب مساوی ہوں تو مثلث ہر طرح سے مساوی ہونگے۔
- (۵) ایک دیے ہوئے نقطہ سے ایک خط مستقیم تک چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ وہ عمود ہوتا ہے جو اس نقطہ سے خط مذکور تک کھینچا جائے۔
- (۶) متوازی الاضلاع کے مقابل کے ضلع اور نیز زاویے ایک دوسرے کے مساوی ہوتے ہیں اور وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں اور ہر وتر متوازی الاضلاع کو دو مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔
- (۷) اگر تین (یا تین سے زیادہ) متوازی خط ایسے ہوں کہ اُن سے ایک قاطع کے منقطع مساوی ہوں تو کسی دوسرے قاطع کے منقطع بھی مساوی ہونگے۔

۴۔ رقبے۔

- (۱) مساوی قاعدوں اور مساوی ارتفاعوں والے متوازی الاضلاع (یا مثلث) رقبے کے لحاظ سے مساوی ہوتے ہیں۔

(۲) کسی مثلث قائم الزاویہ میں وتر پر کا مربع باقی دو ضلعوں پر کے مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے اور اس کا عکس۔

۵۔ جبریہ ضابطے۔

$$(۱) ک (ل + ب + ج +) = ک ل + ک ب + ک ج + ...$$

$$(۲) (ل \pm ب)^2 = ل^2 \pm ۲ ل ب + ب^2$$

$$(۳) ل^2 - ب^2 = (ل + ب) (ل - ب)$$

$$(۴) (ل + ب)^2 = ل^2 + ۲ ل ب + ب^2$$

$$(۵) (ل + ب)^2 - (ل - ب)^2 = ۴ ل ب$$

۶۔ دائرے۔

(۱) دائرہ کے مرکز کو وتر کے وسطی نقطہ سے ملانے والا خط مستقیم وتر پر عمود ہوتا ہے اور اس کا عکس۔

(۲) دو متقاطع دائروں کے مرکزوں کو ملانے والا خط اُن کے مشترک وتر کا عمودی منصف ہوتا ہے۔

(۳) تین دیے ہوئے نقطوں میں سے جو ایک خط مستقیم میں نہیں ہیں ایک اور صرف ایک دائرہ کھینچ سکتا ہے۔

(۴) ایک ہی دائرہ میں یا مساوی دائروں میں مساوی قوسوں یا مساوی وتروں کے محاذی محیط (یا مرکز) پر مساوی زاویے بنتے ہیں اور اس کا عکس۔

(۵) کسی دائرہ میں مساوی طول کے وتر مرکز سے مساوی لفصل ہوتے ہیں اور اس کا عکس۔

(۶) دائرہ کا کوئی مماس اس کے نقطہ تماس میں سے گزرنے والے نصف قطر پر عمود ہوتا ہے۔

(۷) دائرہ کے کسی مماس اور اس کے نقطہ تماس میں سے گزرنے والے

کسی وتر کا درمیانی زاویہ متبادل قطعہ کے اندر کے زاویے کے مساوی ہوتا ہے۔
 (۸) اگر دو دائرے ایک دوسرے کو مس کریں تو دائروں کے مرکز اور نقطہ تماس ایک خط مستقیم میں ہوتے ہیں۔
 (۹) دائرہ کے اندر بنے ہوئے ایک ذوار بقعہ الاصلع (چار ضلعی) کے مقابل کے زاویوں کا مجموعہ دو قائمے ہوتا ہے اور اس کا عکس۔
 (۱۰) اگر ایک دائرہ کے دو وتر ایک دوسرے کو قطع کریں تو ایک وتر کے حصوں کا حاصل ضرب دوسرے وتر کے حصوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے۔

۷۔ طریق۔

(۱) دو معلومہ نقطوں سے مساوی الفصل نقطوں کا طریق معلومہ نقطوں کو ملانے والے خط کا عمودی منصف ہوتا ہے۔
 (۲) ایک ایسے نقطہ کا طریق جو ایک دیے ہوئے خط سے ایک دیے ہوئے فاصلہ پر ہے متوازی خطوط کا ایک جوڑا ہے جن میں سے ہر ایک دیے ہوئے خط کے متوازی ہے۔
 (۳) ایک ایسے نقطہ کا طریق جو دو متقاطع خطوط مستقیم سے مساوی فاصلوں پر رہتا ہے ان خطوط کے درمیانی زاویوں کے منصفوں کا جوڑا ہے۔
 (۴) ایک ایسے نقطہ کا طریق جس پر دو دیے ہوئے نقطوں کو ملانے والے خط کے محاذی ایک دیا ہوا زاویہ بنتا ہے دائرہ کی ایک قوس ہے۔

۸۔ عملی مسئلے۔

(۱) ایک دیے ہوئے خط یا زاویہ کی تہیہ کرنا۔
 (۲) ایک دیے ہوئے خط پر ایک نقطے سے (جو دیے ہوئے خط پر یا اس کے باہر ہو) عمود کھینچنا۔
 (۳) دیے ہوئے زاویہ کے مساوی زاویہ بنانا۔

(۴) ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے ایک دیے ہوئے خط کے متوازی خط

کھینچنا۔

(۵) ایک دیے ہوئے خط کو متحدہ مساوی حصوں میں تقسیم کرنا۔

(۶) مثلث کا بنانا جبکہ

(۱) تین ضلعے معلوم ہوں۔

(ب) دو ضلعے اور درمیانی زاویہ معلوم ہوں۔

(ج) ایک ضلع اور دو زاویے معلوم ہوں۔

(۷) ایک دیے ہوئے کثیرالاضلاع کے مساوی رقبہ کا مربع بنانا۔

(۸) ایک دیے ہوئے صحیح عدد کا جذر ہندسی طور پر معلوم کرنا۔

(۹) ایک دائرہ کھینچنا جو

(۱) ایک مثلث کے رؤسوں میں سے گزرے۔

(ب) ایک مثلث کے ضلعوں کو مس کرے۔

(۱۰) ایک دیے ہوئے نقطہ پر دائرہ کا مماس کھینچنا۔

(۱۱) ایک بیرونی نقطہ سے دائرہ کے دو مماس کھینچنا۔

(۱۲) دو دیے ہوئے دائروں کے مشترک (راست اور متقاطع)

مماس کھینچنا۔

دوسرا باب

نسبت و تناسب

۹۔ تعریفات اور ابتدائی اصول۔

ایک مقدار کو اُسی جنس کی کسی دوسری مقدار کے ساتھ جو ربط یا رشتہ ہو اُس کو ان مقداروں کی نسبت کہتے ہیں، جبکہ یہ رشتہ ان مقداروں کا اس طرح مقابلہ کرنے سے دیکھا جائے کہ ایک مقدار دوسری مقدار کا کتنے گنا یا کونسا حصہ ہے۔ مثلاً اگر دو ہم جنس مقداروں میں بالترتیب ۱ اور ۲ اکائیاں ہوں تو پہلی مقدار کو دوسری مقدار کے ساتھ جو نسبت ہے وہ کسر $\frac{1}{2}$ یا علامت ۱:۲ سے تعبیر ہوتی ہے۔ پہلی مقدار ۱ کو نسبت کا مقدم اور دوسری مقدار ۲ کو مؤخر کہتے ہیں۔

دو مقداروں کی نسبت اس اکائی پر موقوف نہیں ہوتی جس کی رقوم میں ان مقداروں کو ناپا گیا ہے۔

یہ نہایت ضروری ہے کہ جن مقداروں کا مقابلہ ایک نسبت کے ذریعہ کیا جائے وہ ایک ہی جنس کی ہوں۔ مثلاً دونوں طول ہوں یا دونوں زاویے ہوں یا دونوں رقبے ہوں۔ ظاہر ہے کہ ایک خط کے طول کا مقابلہ دوسری جنس کی کسی مقدار مثلاً کسی مثلث کے رقبے کے ساتھ نہیں کیا جاسکتا۔

نیز نسبت ایک عدد مجزؤ ہے جو صحیح یا کمزور ہو سکتا ہے مثلاً ۶ سمر اور ۸ سمر بے خطوط کے طولوں کی نسبت $\frac{۶}{۸}$ یا $\frac{۳}{۴}$ ہے نہ کہ $\frac{۳}{۲}$ سمر۔ اگر دو ہم جنس مقداروں کو ایک مشترک اکائی (جسے وقتی مشترک کہتے ہیں) کی رقوم میں پورا پورا ناپا جاسکے تو ان مقداروں کو متوافق مقداریں کہتے ہیں اور ان مقداروں کی نسبت کو دو صحیح اعداد کی نسبت سے تعبیر کیا جاسکتا ہے۔

ممکن ہے کہ دی ہوئی مقداروں میں کوئی وقتی مشترک نہ ہو مثلاً اگر ایک مربع کا ضلع ۱ ہو تو اس کا وتر ۲۲ ہوگا۔ ۲۲ کی قیمت ٹھیک ٹھیک طور پر نہیں نکالی جاسکتی۔ اگرچہ کہ یہ قیمت کسی مطلوبہ درجہ صحت تک حاصل کی جاسکتی ہے۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ مربع کے ضلع اور وتر کے طول ایک ہی اکائی کی رقوم میں ٹھیک ٹھیک طور پر نہیں ناپے جاسکتے۔

ایسی مقداروں کو جن میں کوئی وقتی مشترک نہ ہو غیر متوافق یا متباہن مقداریں کہتے ہیں۔ دو غیر متوافق مقداروں کی نسبت کو ٹھیک ٹھیک طور پر دو صحیح اعداد کی نسبت کی شکل میں بیان نہیں کیا جاسکتا لیکن ان کی نسبت کو کسی مطلوبہ درجہ صحت تک معلوم کیا جاسکتا ہے مثلاً اگر ۲۲ کی تقریبی قیمت ۱۰۴۱۳۲ لی جائے تو مربع کے ضلع اور وتر کی نسبت کی قیمت $\frac{۱۰۴۱۳۲}{۱۰۴۱۳۱}$ سے تعبیر ہوگی جہاں طول کی ایک چھوٹی اکائی ۱۰۰۰ کو بطور وقتی مشترک لیا گیا ہے۔ مربع کے ضلع اور وتر کے طولوں کی نسبت کی اس سے بہتر تقریبی قیمت معلوم ہو سکتی ہے اگر ۲۲ کی تقریبی قیمت اعشاریہ کے چار سے زیادہ مقاموں تک لی جائے۔

۱۰۔ اگر دو ہم جنس مقداروں کی نسبت دوسری ہم جنس مقداروں کی نسبت کے مساوی ہو تو یہ چار مقداریں تناسب کہلاتی ہیں۔ یا یوں بیان کرتے ہیں کہ یہ چار مقداریں تناسب میں ہیں مثلاً اگر $a : b = c : d$ تو a, b, c, d تناسب کہلاتی ہیں۔

تعریف۔ a اور c کو طرفین تناسب اور b اور d کو

وسطین تناسب کہتے ہیں۔

نوٹ - کسی تناسب مثلاً $a : b = c : d$ میں ہر نسبت کی مقداریں ایک ہی جنس کی ہونی چاہئیں لیکن یہ ضروری نہیں ہے کہ دونوں نسبتوں کی چاروں مقداریں ایک ہی جنس کی ہوں مثلاً ایسا ہو سکتا ہے کہ a اور b دونوں رقبے ہوں اور c اور d دو طول۔ اس صورت میں تناسب سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ پہلا رقبہ کو دوسرے رقبہ کے ساتھ وہی نسبت ہے جو پہلا طول کو دوسرے طول کے ساتھ ہے۔

۱۱۔ تعریفات۔ اگر چار مقداریں a, b, c, d ایسی ہوں کہ

$a : b = c : d$ تو a کو $a : b$ کا چوتھا تناسب کہتے ہیں۔

اگر تین مقداریں a, b, c ایسی ہوں کہ $a : b = b : c$ تو c کو a اور b کا تیسرا تناسب کہتے ہیں اور b کو a اور c کا وسط تناسب یا ہندسی اوسط کہتے ہیں۔

۱۲۔ علوم متعارفہ۔

(۱) جو نسبتیں ایک ہی نسبت کے مساوی ہوں وہ ایک دوسرے کے بھی مساوی ہوتی ہیں۔ مثلاً اگر $a : b = c : d$ اور $c : d = e : f$ تو ظاہر ہے کہ $a : b = e : f$

(۲) اگر تین ہم جنس مقداریں a, b, c ایسی ہوں کہ $a : b = b : c$ تو ظاہر ہے کہ $a : c = b : b$

۱۳۔ تناسب کے ابتدائی مسائل۔

تناسب کے متعلق مندرجہ ذیل ابتدائی مسئلوں کے ثبوت جبر و مقابلہ کی کسی دوسری کتاب میں پائے جاسکتے ہیں۔

$$(۱) \text{ اگر } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ تو}$$

$$(۱) \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \text{ (عکس نسبت)}$$

$$(۲) \quad \frac{ج}{د} = \frac{ب}{پ} \quad (\text{جہدیل نسبت})$$

$$(۳) \quad ج - د = ب - پ$$

$$(۴) \quad \frac{ج + د}{د} = \frac{ب + پ}{پ} \quad (\text{ترکیب نسبت})$$

$$(۵) \quad \frac{ج - د}{د} = \frac{ب - پ}{پ} \quad (\text{تفصیل نسبت})$$

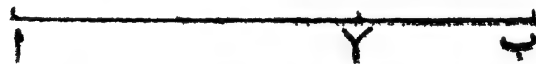
$$(۶) \quad \frac{ج + د}{ج - د} = \frac{ب + پ}{ب - پ} \quad (\text{ترکیب و تفصیل نسبت})$$

$$(ب) \quad \text{اگر } \frac{ج}{د} = \frac{ب}{پ} = \frac{ع}{ف} = \dots = \frac{ک}{ط} \quad \text{تو}$$

$$\frac{ج + د + ع + ف + \dots + ک}{ب + پ + د + ف + \dots + ط} =$$

$$\frac{ج + د + ع + ف + \dots + ک}{ب + پ + د + ف + \dots + ط} = \text{جہاں } ج، د، ع، ف، \dots، ک \text{ کوئی عدد ہیں}$$

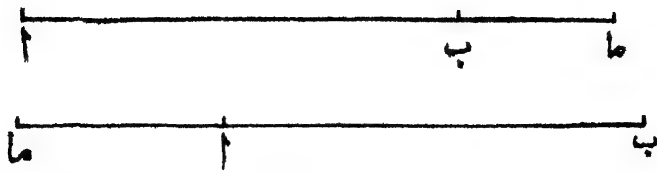
۱۴۔ تعریف۔ اگر ایک محدود خط مستقیم اب پر (۱) اور ب کے درمیان) ایک نقطہ لایا جائے تو ہم کہتے ہیں کہ اب کی داخلی تقسیم نقطہ لایا گیا ہے



الا اور لا ب خط اب کے دو حصے ہیں اور ان کے طوں کی علامت ایک ہی ہے کیونکہ دونوں کی سمت وہی ہے اس لیے ا لا اور لا ب کی نسبت ایک ثابت مقدار ہوگی۔

اگر نقطہ ما، اب محدودہ پر (ا کی جانب یا ب کی جانب) لیا جائے تو ہم کہتے ہیں کہ اب کی خارجی تقسیم نقطہ ما پر ہوئی ہے اس صورت میں ا ما اور ما ب کی سمتیں مختلف ہیں اور خط اب کے دو حصے ا ما، ما ب ہیں جو مختلف علامت ہیں۔ اس لیے ا ما اور ما ب کی نسبت

ایک منفی مقدار ہے۔

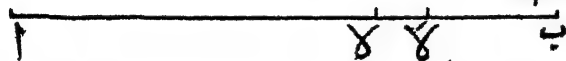


پس معلوم ہوا کہ اگر ۲ ب کے حصص کی نسبت کی علامت مثبت ہو تو تقسیم داخلی ہوگی اور اگر نسبت مذکور کی علامت منفی ہو تو تقسیم خارجی ہوگی۔

خارجی تقسیم کی صورت میں اگر ما ب کی طرف واقع ہو تو ا ما اور ما ب کی نسبت ایک منفی مقدار ہوگی جس کی عددی قیمت اسے بڑی ہوگی۔ اسی طرح اگر ما ا کی طرف واقع ہو تو ا ما اور ما ب کی نسبت ایک منفی کسر واجب ہوگی۔

نوٹ۔ عام طور پر اگر اشتباہ کا اندیشہ نہ ہو تو اختصار اور سہولت کے مد نظر خط کے حصوں کی نسبت کی علامت کو نظر انداز کر دیا جاتا ہے۔ مثلاً اگر ا ب محدودہ پر نقطہ ما ایسا ہو کہ ا ما اور ما ب کی نسبت ۳ - ہو تو اسے یوں بھی بیان کیا جاتا ہے کہ ا ب کی خارجی تقسیم نقطہ ما پر ۳ : ۲ کی نسبت میں ہوئی ہے۔

۱۵۔ مسئلہ۔ ایک دیے ہوئے خط کو ایک دی ہوئی نسبت میں داخل ایک اور صرف ایک ہی نقطہ پر اور خارجاً ایک اور صرف ایک ہی نقطہ پر تقسیم کیا جاسکتا ہے۔



اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ ایک دیے ہوئے خط ا ب کو داخل ایک دی ہوئی نسبت ج میں دو مختلف نقطوں لا اور لا پر تقسیم کیا جاسکتا ہے۔

$$\text{اڈوئے مفروض} = \frac{\text{ا}}{\text{لا ب}} = \frac{\text{م}}{\text{ن}} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{ا}}{\text{لا ب}} = \frac{\text{ا}}{\text{ن}}$$

$$\therefore \frac{\text{ا}}{\text{لا ب}} = \frac{\text{ا}}{\text{لا ب}}$$

$$\therefore \frac{\text{ا}}{\text{لا ب}} = \frac{\text{ا}}{\text{لا ب}} \quad \text{یعنی} \quad \frac{\text{ا}}{\text{لا ب}} = \frac{\text{ا}}{\text{لا ب}}$$

∴ لا ب = لا ب

پس لا منطبق ہے لا پر یعنی لا اور لا مختلف نقطے نہیں ہیں۔
اسی طرح خارجی تقسیم کی صورت میں بھی یہ مسئلہ ثابت ہو سکتا ہے۔
اس کا ثبوت مندرجہ بالا طریقہ سے طالب علم خود بہم پہنچائے۔

امثلہ ۱

(۱) ایک خط مستقیم ۹۶ سم لبا ہے اس کی داخلی تقسیم ۵:۷ کی نسبت
میں کی گئی ہے۔ خط کے حصوں کے طول معلوم کرو۔ (جواب ۴۶ سم، ۵۰ سم)
(۲) ایک خط مستقیم ۵۶ سم لبا ہے۔ اس کی خارجی تقسیم ۵:۴ کی
نسبت میں کی گئی ہے، حصوں کے طول معلوم کرو۔ (جواب ۲۲ سم، ۳۴ سم)
(۳) خط مستقیم ا ب ۶۶ سم لبا ہے اس کو داخلا لا پر اور خارجا ما پر
ایک ہی نسبت ۵:۳ میں تقسیم کیا گیا ہے، لا اور ا ما کے طول معلوم کرو

اور تصدیق کرو کہ $\frac{2}{a} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a}$ [جواب ا لا = ۴ سم، ا ما = ۱۶ سم]
(۴) ر ل بے خط مستقیم کی داخلی تقسیم نسبت م:ن میں کی گئی ہے، حصوں
کے طول معلوم کرو (جواب $\frac{m}{m+n}$ ، $\frac{n}{m+n}$)

(۵) ر ل بے خط مستقیم کی خارجی تقسیم نسبت م:ن میں کی گئی ہے، حصوں
کے طول معلوم کرو۔ (جواب $\frac{m}{m-n}$ ، $\frac{n}{m-n}$)

(۶) دو خطوط مستقیم ا ب اور ج د کی داخلی تقسیم ایک ہی نسبت میں بالترتیب
لا اور ما پر کی گئی ہے، ثابت کرو کہ

$$(۱) \quad a : b = c : d \quad \text{ما د}$$

$$(۲) \quad a : c = b : d \quad \text{ج ما}$$

(۷) ا ب ایک خط مستقیم ہے، ایک نقطہ لا، ا سے ب کی طرف

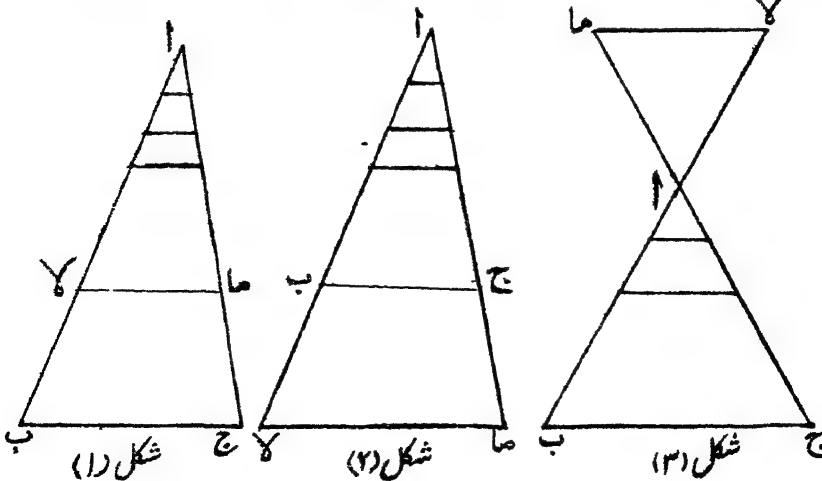
ظاہر ہے کہ یہ نسبت منفی ہوگی۔

جب لا ب کے قریب ہے تو لا : لا ب بہت بڑی منفی مقدار ہے اور لا کو ب کے کافی قریب لینے سے اس نسبت کی عددی قیمت کو جتنا بڑا چاہیں بنا سکتے ہیں۔ جوں جوں لا دائیں جانب حرکت کرتا ہے اس نسبت کی عددی قیمت گھٹتی جاتی ہے لیکن ہمیشہ ۱ سے بڑی رہتی ہے۔ لا کو ب سے کافی دور لینے سے اس نسبت کی عددی قیمت کو ۱ کے جس قدر قریب چاہیں لاسکتے ہیں۔ پس معلوم ہوا کہ جوں جوں لا ب سے شروع ہو کر دائیں طرف حرکت کرتا ہے نسبت لا : لا ب کی عددی قیمت ∞ سے ۱ کے قریب آتی جاتی ہے۔

نوٹ۔ دیکھا جائے کہ نسبت لا : لا ب کی کسی عددی قیمت کے جواب میں جو ۱ سے بڑی ہے نقطہ لا کے دو مقام ہیں جن میں ایک و اور ب کے درمیان ہے اور دوسرا ب محدودہ پر ب کے دائیں جانب ہے۔

(۹) سوال ۵ کے مماثل طریقہ سے نسبت لا : لا ب کے تغیر پر بحث کرو جبکہ لا ب ۱ محدودہ پر ۱ سے شروع ہو کر بائیں جانب حرکت کرے۔

۱۶۔ مسئلہ: ایک خط مستقیم جو ایک مثلث کے ایک ضلع کے متوازی ہے مثلث کے باقی دو اضلاع کو یا اضلاع محدودہ کو ایک ہی نسبت میں تقسیم کرتا ہے اور اس کا



ثلث اب ج کے ضلع ب ج کے متوازی ایک خط کھینچا گیا ہے جو اضلاع اب، اج کو یا اضلاع محدودہ کو بالترتیب لا اور ما پر کاٹتا ہے، ثابت کرنا ہے کہ
 $\text{الا} : \text{لاب} = \text{اما} : \text{ماج}$ -
 شکل ۱ میں نقاط لا اور ما بالترتیب اب، اج کی داخلی تقسیم کرتے ہیں۔

اشکال ۱ اور ۲ میں نقاط لا اور ما بالترتیب اب اور اج کی خارجی تقسیم کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ لا اور لاب کے طولوں کا وفق مشترک طول ط ہے، نیز فرض کرو کہ الا میں طول ط، م دفعہ شریک ہے اور لاب میں طول ط، ن دفعہ شریک ہے۔

$$\text{تب } \text{الا} = \text{م} \times \text{ط} \text{ اور } \text{لاب} = \text{ن} \times \text{ط}$$

$$\therefore \text{الا} : \text{لاب} = \text{م} \times \text{ط} : \text{ن} \times \text{ط} = \text{م} : \text{ن} \dots \dots \dots (۱)$$

الا اور لاب کو طول ط والے حصوں میں تقسیم کرو اور نقاط تقسیم میں ب ج کے متوازی خطوط کھینچو۔ ان خطوط کے ذریعہ اما اور ماج بالترتیب مساوی طول والے م اور ن حصوں میں تقسیم ہو جائیں گے۔ فرض کرو کہ ان حصوں میں سے ہر ایک کا طول = ل

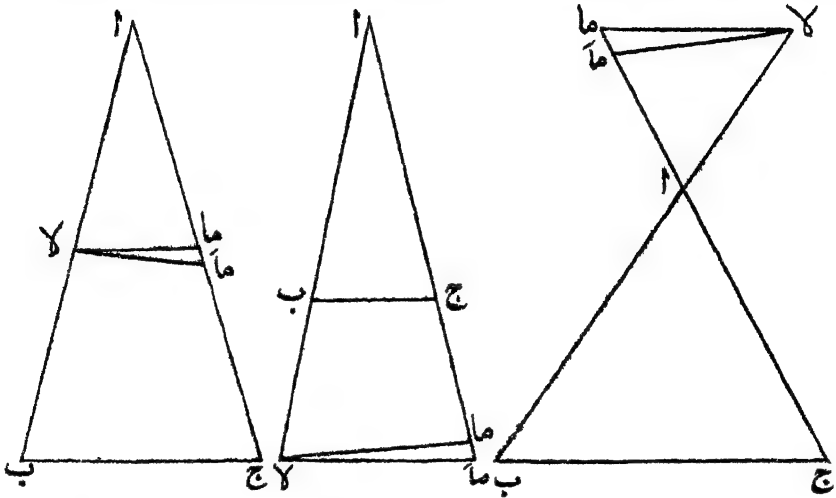
$$\text{تب } \text{اما} = \text{م} \times \text{ل} \text{ اور } \text{ماج} = \text{ن} \times \text{ل}$$

$$\therefore \text{اما} : \text{ماج} = \text{م} \times \text{ل} : \text{ن} \times \text{ل} = \text{م} : \text{ن} \dots \dots \dots (۲)$$

پس (۱) اور (۲) سے، $\text{الا} : \text{لاب} = \text{اما} : \text{ماج}$ - یہی ثابت کرنا تھا۔
 نوٹ - شکل ۱ میں لا : لاب اور نیز اما : ماج دونوں مثبت ہیں اور مقدار میں مساوی ہیں۔

اشکال (۲) اور (۳) میں لا : لاب اور نیز اما : ماج دونوں منفی ہیں اور مقدار میں مساوی ہیں۔

مسئلہ بالا کا عکس یہ ہے کہ اگر مثلث $اب ج$ کے اضلاع $اب$ ، $ا ج$ پر بالترتیب نقاط $لا$ اور $ما$ اس طرح لیے جائیں کہ (بمطابق مقدار اور علامت کے)
 $الا : لاب = ا ما : ما ب$ تو $لا ما$ متوازی ہوگا $ب ج$ کے۔



اگر $لا ما$ متوازی نہیں ہے $ب ج$ کے تو $لا ما$ متوازی $ب ج$ کے کہیں تو

چونکہ $لا ما \parallel ب ج$ اس لیے $الا : لاب = ا ما : ما ب$ لیکن معلوم ہے $الا : لاب = ا ما : ما ب$

اس لیے $ا ما : ما ب = ا ما : ما ب$

اس لیے نقطہ $ما$ ، منطبق ہے نقطہ $ما$ پر

پس ثابت ہوا کہ $لا ما$ متوازی ہے $ب ج$ کے

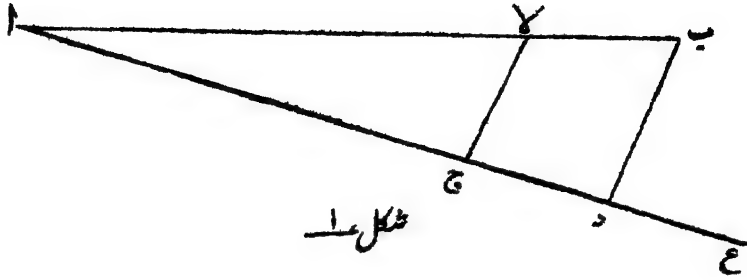
نوٹ: مسئلہ بالا کے ثبوت میں یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ $الا$ اور $لاب$ متوافق

مقداریں ہیں۔ اگر $الا$ اور $لاب$ غیر متوافق ہوں تو کسی بہت چھوٹی اکائی کی رقم میں ان دونوں طولوں کو ناپنے سے $الا : لاب$ کی تقریبی قیمت حاصل کی جاسکتی ہے اور ثابت کیا جاسکتا ہے کہ $ا ما : ما ب$ کی تقریبی قیمت $الا : لاب$ کی تقریبی قیمت کے مساوی ہے۔

نتیجہ صریح: اگر تین یا تین سے زیادہ متوازی خطوط کو دو خطوط مستقیم قطع

کریں تو ایک قاطع پر کے مقطوعوں کے طول دوسرے قاطع پر کے مناظر مقطوعوں کے

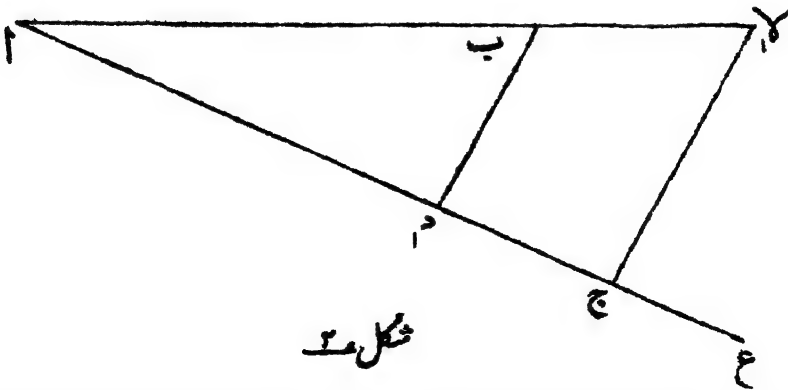
طولوں کے مناسب ہونگے۔
 ۱۔ مسئلہ عملی ایک دیے ہوئے خط کو داخلہ اور خارجہ ایک دی ہوئی نسبت میں تقسیم کرنا۔
 داخلی تقسیم۔ [دیکھو شکل ۱۔]



شکل ۱۔

فرض کرو کہ ا ب ایک دیا ہوا خط مستقیم ہے۔ اسے داخلہ نسبت م : ن میں تقسیم کرنا مقصود ہے۔ اسے کوئی اور خط ا ع کھینچو اور طول کی کوئی مناسب اکائی لے کر ا ع پر نقاط ج اور د ایسے معلوم کرو کہ ا ج میں ایسی م اکائیاں اور ج د میں ایسی ن اکائیاں شامل ہوں۔

د ب کو ملاؤ اور د ب کے متوازی ج کا کھینچو جو ا ب سے لا پر ملے تب نقطہ لا خط ا ب کو داخلہ دی ہوئی نسبت م : ن میں تقسیم کریگا۔ چونکہ ج کا متوازی ہے مثلث ا ب د کے ضلع د ب کے اس لیے لا : ا ب = ا ج : ج د = م : ن
 خارجی تقسیم [دیکھو شکل ۲۔]



شکل ۲۔

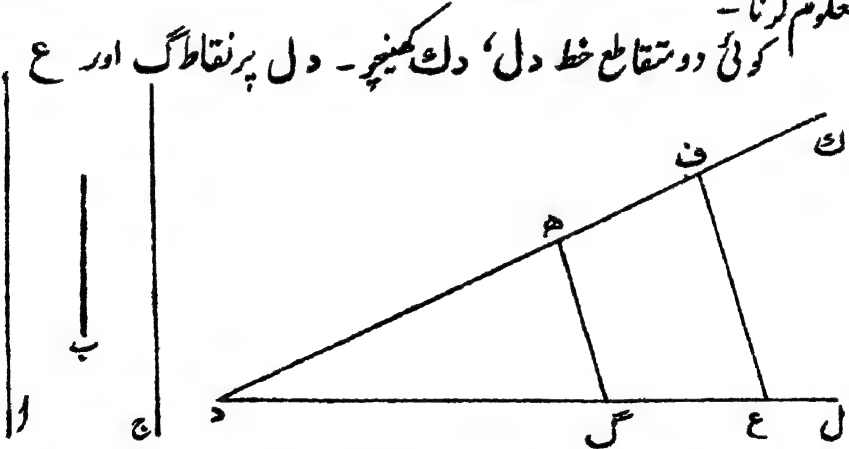
ا میں سے کوئی اور خط ا ع کھینچو اور طول کی کوئی مناسب اکائی لے کر ا ع پر نقاط ج اور د ایسے معلوم کرو کہ ا ج میں ایسی م اکائیاں اور ج د میں ایسی ن اکائیاں شامل ہوں (خارجی تقسیم کی صورت میں ا ج اور ج د کی سمتیں مخالف ہونگی)۔

د ب کو ملاؤ اور د ب کے متوازی ج ک کھینچو جو اب محدودہ سے ک پر ملے تب نقطہ لا خط اب کو خارجاً دی ہوئی نسبت م : ن میں تقسیم کریگا۔ چونکہ ج ک متوازی ہے مثلث ا ب د کے ضلع د ب کے

اس لیے ا ک : لا ب = ا ج : ج د = م : ن

پس اب کی داخلی تقسیم لا پر اور خارجی تقسیم ک پر دی ہوئی نسبت م : ن میں ہوتی ہے۔

۱۸۔ مسئلہ عملی۔ تین دیے ہوئے خطوط ا ب ج کا چوتھا تناسب معلوم کرنا۔



ایسے معلوم کرو کہ د گ = ا اور گ ع = ب اور د ک پر نقطہ ہ ایسا معلوم کرو کہ د ہ = ج

گ ہ کو ملاؤ اور گ ہ کے متوازی ع ف کھینچو جو د ک سے ف پر ملے۔

تب ہ ف چوتھا تناسب ہوگا معلومہ خطوط ا ب ج کا

چونکہ مثلث د ع ف میں گ ہ // ع ف

اس لیے د گ : گ ع = د ہ : ہ ف

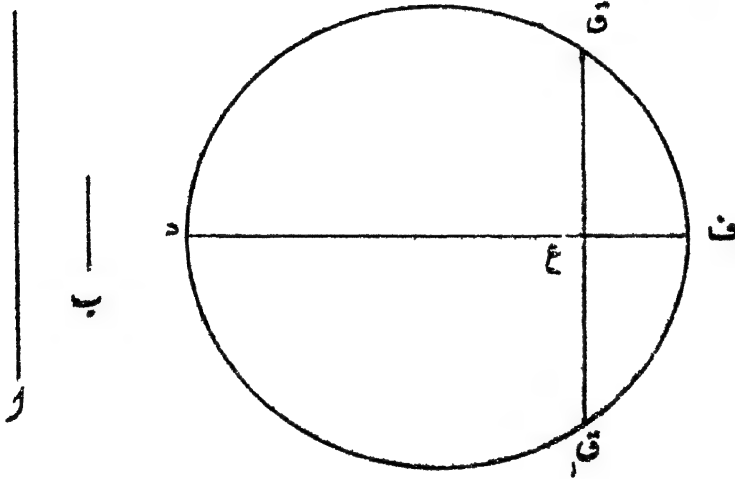
یعنی $ا : ب = ج : ه$

پس ثابت ہوا کہ $ه$ چوتھا تناسب ہے $ا$ ، $ب$ ، $ج$ کا

نوٹ: تیسرے تناسب کی تعریف سے ظاہر ہے کہ $ا$ اور $ب$ کا تیسرا تناسب فی الحقیقت $ا$ ، $ب$ کا چوتھا تناسب ہے۔

اس لیے مندرجہ بالا مسئلہ عملی کے طریقہ سے دو دیے ہوئے خطوط مستقیم $ا$ اور $ب$ کا تیسرا تناسب معلوم کیا جاسکتا ہے۔

۱۹۔ مسئلہ عملی۔ دو دیے ہوئے خطوط $ا$ اور $ب$ کے درمیان وسط تناسب معلوم کرنا۔



ایک خط مستقیم پر تین نقطے $د$ ، $ع$ ، $ف$ ایسے معلوم کرو کہ

$$د = ا \text{ اور } ع = ب$$

$د$ کو قطمان کر دائرہ کھینچو اور $ع$ میں سے ایک خط $ق$ کھینچو جو $د$ پر عمود ہے اور دائرہ سے $ق$ اور $ق$ پر ملتا ہے۔

تب $ع$ $ق$ وسط تناسب ہوگا دیے ہوئے خطوط $ا$ اور $ب$ کے درمیان۔ چونکہ قطر $د$ عمود ہے وتر $ق$ پر

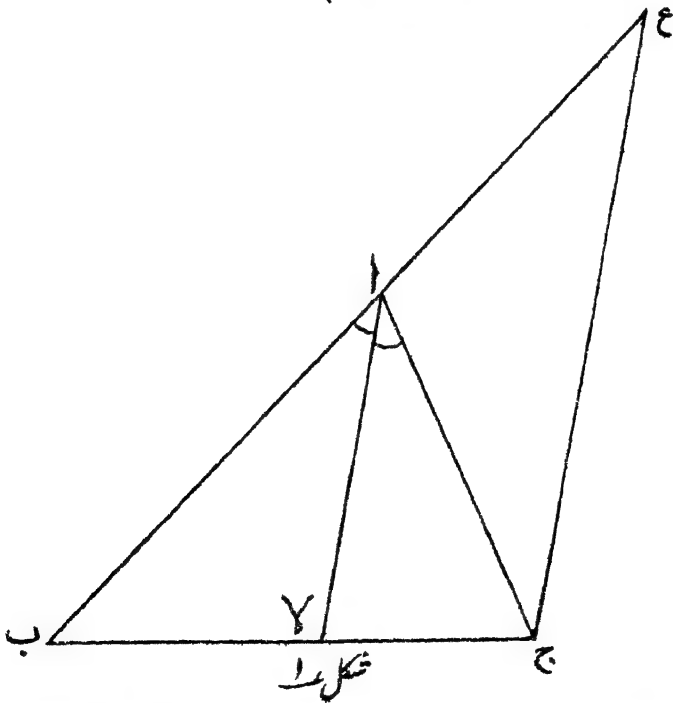
$$\text{اس لیے } ع = ق = ع$$

نیز ق ق اور د ف کے حصول کے حاصل ضرب مساوی ہیں

$$\text{یعنی ق ق} \times \text{ع} = \text{ع ق} \times \text{د} = \text{ع ف}$$

$$\text{یعنی ع ق}^2 = \text{ا} \times \text{ب} \quad \text{یعنی ا : ع ق} = \text{ع ق} : \text{ب}$$

پس معلوم ہوا کہ ع ق وسط تناسب ہے ا اور ب کے درمیان۔
نوٹ: مندرجہ بالا عمل کے متبادل ثبوت کے لیے دیکھو مسئلہ ۳۰۔ مثال ۱۰۔
۳۰۔ مسئلہ۔ مثلث کے کسی زاویہ کا داخلی (خارجی) ناصف مقابل کے ضلع کو باقی دو اضلاع کی نسبت میں داخل (خارجاً) تقسیم کرتا ہے اور اس کا عکس حصہ اول (داخلی ناصف) (دیکھو شکل ۱)۔



مثلث ا ب ج کے زاویہ ب ا ج کا داخلی ناصف مقابل کے ضلع ب ج سے نقطہ لا پر ملتا ہے، ثابت کرنا ہے کہ
ب ج : لا ج = ا ب : ا ج

لا کے متوازی ج ع کہینچ جو ب ا محدودہ سے ع پر ملے
 تب $\angle ب ا لا = \angle ا ع ج$ (متناظر زاویے)
 اور $\angle لا ا ج = \angle ا ج ع$ (متبادل زاویے)
 لیکن حسب مفروض $\angle ب ا لا = \angle لا ا ج$
 اس لیے $\angle ا ع ج = \angle ا ج ع$

(۱) $\therefore ا ج = ا ع$
 چونکہ مثلث ب ج ع میں لا متوازی ہے ضلع ج ع کے
 اس لیے ب لا : لا ج = ب ا : ا ع

عکس — اگر مثلث ا ب ج میں ضلع ب ج کی داخلی تقسیم
 نقطہ لا پر اس طرح کی جائے کہ ب لا : لا ج = ب ا : ا ج تو ا لا داخلی
 ناصف ہوگا $\angle ب ا ج کا$

لا کے متوازی ج ع کہینچ جو ب ا محدودہ سے ع پر ملے
 چونکہ مثلث ب ج ع میں لا متوازی ہے ضلع ج ع کے
 اس لیے ب لا : لا ج = ب ا : ا ع
 لیکن حسب مفروض ب لا : لا ج = ب ا : ا ج
 اس لیے ب ا : ا ع = ب ا : ا ج یعنی ا ع = ا ج

اس لیے $\angle ا ج ع = \angle ا ع ج$

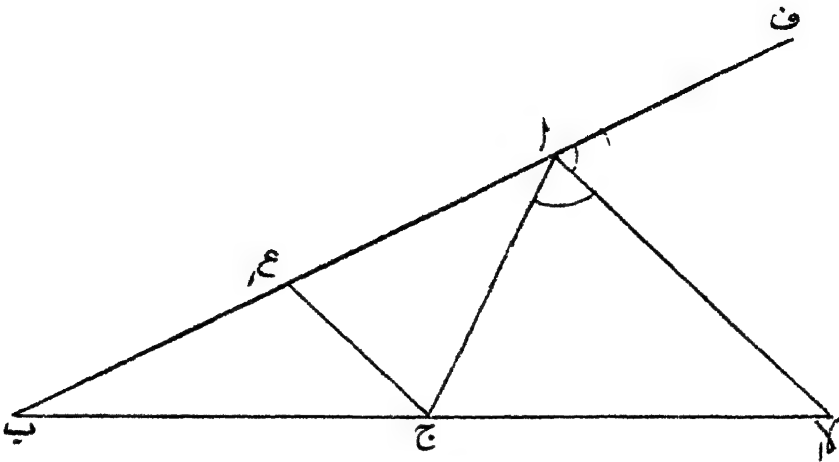
نیز $\angle ب ا لا = \angle ا ع ج$ (متناظر زاویے)

اور $\angle لا ا ج = \angle ا ج ع$ (متبادل زاویے)

اس لیے $\angle ب ا لا = \angle لا ا ج$

یعنی ا لا داخلی ناصف ہے $\angle ب ا ج کا$ ۔ یہی ثابت کرنا تھا۔

حصہ دوم (خارجی ناصف) (دیکھو شکل ۱۷)



شکل ۱۷

مثلث ABC کے زاویہ B کا خارجی ناصف مقابل کے ضلع BC سے LA پر
 ملتا ہے ثابت کرنا ہے کہ $B : LA : ج : LA = AB : AC$
 LA کے متوازی $ج$ AC کھینچو جو AB سے E پر ملے۔
 ب A کو کسی نقطہ F تک خارج کرو۔

تب $AB : LA = AC : EF$ (متناظر زاویے)

اور $AB : LA = AC : EF$ (متبادل زاویے)

لیکن حسب مفروض $AB : LA = AC : EF$

اس لیے $AB : AC = LA : EF$

(۱) اس لیے $AB : AC = LA : EF$
 چونکہ مثلث ABC میں LA متوازی ہے BC کے

اس لیے $B : LA : ج : LA = AB : AC$

$AB : AC = B : LA$ بموجب (۱)

یہی ثابت کرنا تھا۔

عکس۔ اگر مثلث $ا ب ج$ میں ضلع $ب ج$ کی خارجی تقسیم نقطہ $لا$ پر اس طرح کی جائے کہ $ب لا : لا ج = ا ب : ا ج$ تو $ا لا$ خارجی ناصف ہوگا \triangleright $ب ا ج$ کا $لا$ کے متوازی $ج ع$ کھینچو جو $ب ا$ سے $ع$ پر ملے $ب ا$ کو کسی نقطہ $ف$ تک خارج کرو۔

چونکہ مثلث $ب ج ع$ میں $لا$ متوازی ہے $ج ع$ کے

اس لیے $ب لا : لا ج = ب ا : ا ع$

لیکن جب مفروض $ب لا : لا ج = ا ب : ا ج$

اس لیے $ب ا : ا ع = ا ب : ا ج$ یعنی $ا ع = ا ج$

اس لیے \triangleright $ا ج ع = \triangleright$ $ا ج ا$

(متناظر زاویے)

\triangleright $ا ج ا = \triangleright$ $ا ج ا$

(متبادل زاویے)

\triangleright $ا ج ا = \triangleright$ $ا ج ا$

اس لیے \triangleright $ا ج ا = \triangleright$ $ا ج ا$

یعنی $ا لا$ خارجی ناصف ہے \triangleright $ب ا ج$ کا۔ یہی ثابت کرنا تھا۔

نوٹ: اگر مثلث $ا ب ج$ میں $ا ب = ا ج$ تو \triangleright $ب ا ج$ کا

داخلی ناصف مقابل کے ضلع $ب ج$ کے وسطی نقطہ میں سے گزرتا ہے۔ یعنی قاعدہ کو ضلع

کی نسبت یعنی $ا : ا$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے جو مسئلہ بالا کے عین مطابق ہے۔

نیز \triangleright $ب ا ج$ کا خارجی ناصف قاعدہ $ب ج$ کے متوازی ہے اور

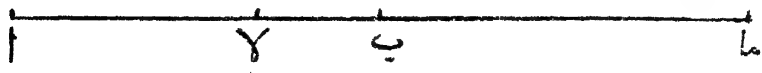
اس لیے قاعدہ سے لاتناہی پر ملتا ہے۔ یعنی قاعدہ کی خارجی تقسیم $ا : ا$ کی نسبت

میں کرتا ہے یہ بھی مسئلہ بالا کے عین مطابق ہے۔

۲۔ تعریف: اگر ایک خط مستقیم $ا ب$ کی داخلی تقسیم نقطہ $لا$ پر

اور خارجی تقسیم نقطہ $ما$ پر اس طرح کی جائے کہ $ا لا : لا ب = ا ما : ب ما$ تو

کہا جاتا ہے کہ $ا ب$ کی موسیقی تقسیم $لا$ اور $ما$ پر کی گئی ہے۔

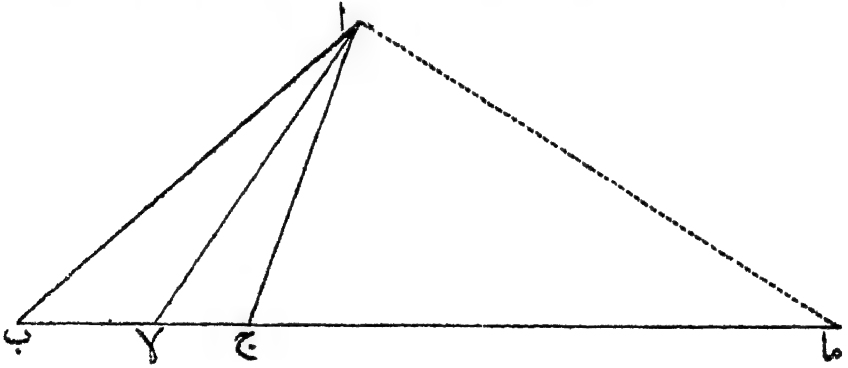


بمطابق ۱ اور ب کے نقاط لا اور ما ایک دوسرے کے موسیقی مزوج

کہلاتے ہیں۔

نوٹ (۱) دفعہ ۲۰ کے مسئلہ سے ظاہر ہے کہ مثلث کے کسی زاویہ کے داخلی اور خارجی ناصف مقابل کے ضلع کی موسیقی تقسیم کرتے ہیں۔

نوٹ (۲) ایک دیے ہوئے قاعدہ ب ج پر کوئی مثلث ۱ ب ج ایسا بنایا گیا ہے کہ $ا : ب : ج$ ایک مستقل مقدار ہے۔ اگر $ب > ا$ ج کے داخلی اور خارجی ناصف قاعدہ ب ج سے بالترتیب لا اور ما پر ملیں تو لا اور ما رأس ۱



کے تمام مقاموں کے لیے ثابت نقطے ہونگے۔ نیز $لا > ا$ ما قائمہ ہے اس لیے دی ہوئی شرائط کے ماتحت رأس ۱ کا طریق ایک دائرہ ہے جس کا قطر لا ما ہے۔

نوٹ (۳) اگر ایک دیے ہوئے خط ب ج کی موسیقی تقسیم لا ما پر کی جائے اور لا ما قطر پر کے دائرہ پر کوئی نقطہ ۱ ہو تو ثابت کیا جاسکتا ہے کہ $ا : ب : ج$ ایک مستقل مقدار ہے (دیکھو دفعہ ۹۳ باب ۲)۔

لا ما قطر پر کے دائرہ کو اپولونی (Appolonius) کا دائرہ کہتے ہیں اور یہ دائرہ اُس نقطہ کا طریق ہے جس کے فاصلے دو ثابت نقطوں سے مستقل نسبت میں رہتے ہیں۔

امثلہ ۱

(۱) ثابت کرو کہ مثلث کے کسی دو ضلعوں کے وسطی نقطوں کو ملانے والا خط

تیسرے ضلع کے متوازی ہے۔

(۲) مثلث کے ایک ضلع کے وسطی نقطہ سے ایک خط قاعدہ کے متوازی

کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ خط دوسرے ضلع کی تنصیف کرتا ہے۔

(۳) ثابت کرو کہ مخروط کے غیر متوازی ضلعوں کے وسطی نقطوں کو ملانے والا

خط متوازی اضلاع کے متوازی ہوتا ہے۔

(۴) مثلثات ا ب ج، د ب ج مشترک قاعدہ ب ج کے ایک ہی

طرف واقع ہیں قاعدہ کے کسی نقطہ ع میں سے ب ا اور ب د کے متوازی خط

کھینچے گئے ہیں جو ا ج، د ج سے بالترتیب ف اور گ پر ملتے ہیں ثابت

کرو کہ ف گ متوازی ہے ا د کے۔

(۵) ایک خط مستقیم مثلث ا ب ج کے اضلاع ب ج، ج ا، ا ب

(ممدودہ بشرط ضرورت) سے بالترتیب د، ع، ف پر ملتا ہے اور ا ب، ا ج کے

ساتھ مساوی زاویے بناتا ہے۔ ثابت کرو کہ ب د : ج د = ب ف : ج ع۔

(۶) مثلث ا ب ج میں ا د عمود ہے زاویہ ب کے د ا علی

ناصرف پر۔ ثابت کرو کہ ایک خط جو د میں سے ب ج کے متوازی کھینچا جائے

ا ج کی تنصیف کرتا ہے۔

(۷) ا، ب، ج، د چار ہم خط نقطے ہیں (اسی ترتیب میں)۔ اس خط

پر ایک نقطہ و ایسا معلوم کرو کہ او : و د = ب و : و ج

(۸) مثلث ا ب ج میں لا ما متوازی ہے ب ج کے اور

ا ب، ا ج سے بالترتیب لا اور ما پر ملتا ہے۔

(۱) اگر ا ب = ۳، ۶، ا ج = ۲، ۴ اور ا لا = ۱، ۲

[جواب ۱، ۲]

تو ا ما محسوب کرو

(ب) اگر ا ب = ۴، ا ج = ۵، ۱۰ اور ا ما = ۹، ۶

[جواب ۸، ۶]

تو ب لا محسوب کرو۔

(ج) اگر ا لا : لا ب = ۸ : ۳ اور ا ج = ۸، ۶

[جواب ۶، ۳]

تو ا ما محسوب کرو۔

(۹) مثلث ا ب ج میں $\angle = 45^\circ$ ، $\angle = 45^\circ$ اور $\angle = 90^\circ$ کے داخلی اور خارجی مُنصفِ ضلع ب ج سے بالترتیب لا اور ما پڑتے ہیں۔ ب ج اور ب ج کے طول محبوب کرو۔
[جواب ۹، ۴۵]

(۱۰) مثلث ا ب ج کا ایک وسطانیہ ا د ہے، زاویوں ا د ب اور ا د ج کے داخلی ناصف ا ب، ا ج سے بالترتیب لا اور ما پڑتے ہیں۔ ثابت کرو کہ لا ما متوازی ہے ب ج کے۔
(۱۱) اگر ذوارجۃ الاضلاع ا ب ج د کے زاویوں ا اور ج کے ناصف ب د پر ملیں تو ثابت کرو کہ زاویوں ب اور د کے ناصف ا ج پر ملینگے۔

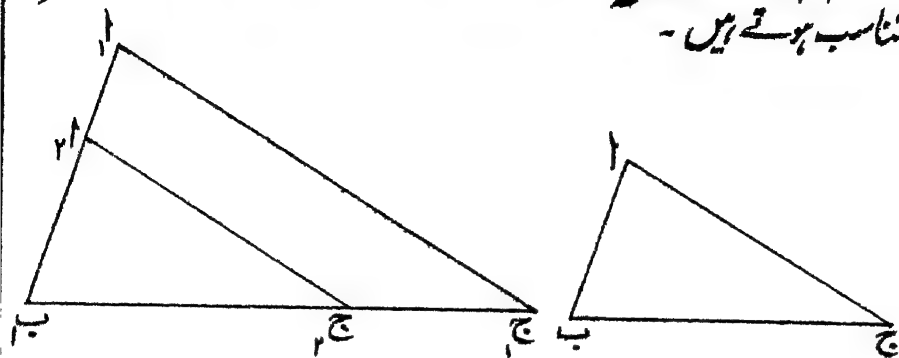
(۱۲) دفعہ ۲۰ کے مسئلہ کی مدد سے ثابت کرو کہ
(۱) مثلث کے تینوں زاویوں کے داخلی ناصف متراکز ہوتے ہیں۔

(ب) مثلث کے دو زاویوں کے خارجی ناصف اور تیسرے زاویہ کا داخلی ناصف متراکز ہوتے ہیں۔
(۱۳) مثلث کا قاعدہ، اُسی زاویہ اور باقی اضلاع کی نسبت معلوم ہیں مثلث بناؤ۔

۲۲۔ متشابه اشکال۔

تعریفات۔ اگر دو مستقیم الاضلاع اشکال ایسی ہوں کہ ایک کے زاویے دوسری شکل کے زاویوں کے جدا گانہ ایک ہی ترتیب میں مساوی ہوں اور ایک کے ضلع دوسری شکل کے نظیر کے ضلعوں کے متناسب ہوں تو یہ اشکال ایک دوسرے کے متشابه کہلاتی ہیں یا مختصراً ان کو متشابه اشکال کہتے ہیں۔
اگر ایک مستقیم الاضلاع شکل کے زاویے جدا گانہ ایک ہی ترتیب میں

دوسری مستقیم الاضلاع شکل کے زاویوں کے مساوی ہوں تو یہ اشکال متساوی الزویا کہلاتی ہیں۔
 مسئلہ - اگر دو مثلث متساوی الزویا ہوں تو ان کے نظیر کے ضلع متناسب ہوتے ہیں۔



مثلثات 'ا ب ج'، 'ا ب ج' میں $\angle A = \angle D$ ، $\angle B = \angle E$ اور (لازمًا) $\angle C = \angle F$ ثابت کرنا ہے کہ

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$

ب ا ا پر نقطہ ا ایسا لو کہ ب ا = ب ا اور ب ا ج پر نقطہ ج ایسا لو کہ ب ج = ج ج ا کو ملاؤ۔

تب مثلثات ب ا ج، ا ب ج اور ب ا ج سے باہم مساوی ہونگے

$$\begin{aligned} \text{اس لیے } \angle B &= \angle A, \angle C = \angle B, \angle A = \angle C \\ \text{اور حسب مفروض } \angle B &= \angle A, \angle C = \angle B, \angle A = \angle C \\ \text{اس لیے } \angle B &= \angle A, \angle C = \angle B, \angle A = \angle C \\ \text{اس لیے } \angle B &\parallel \angle A, \angle C \end{aligned}$$

$$\text{اس لیے } \frac{BA}{AC} = \frac{BA}{AC}$$

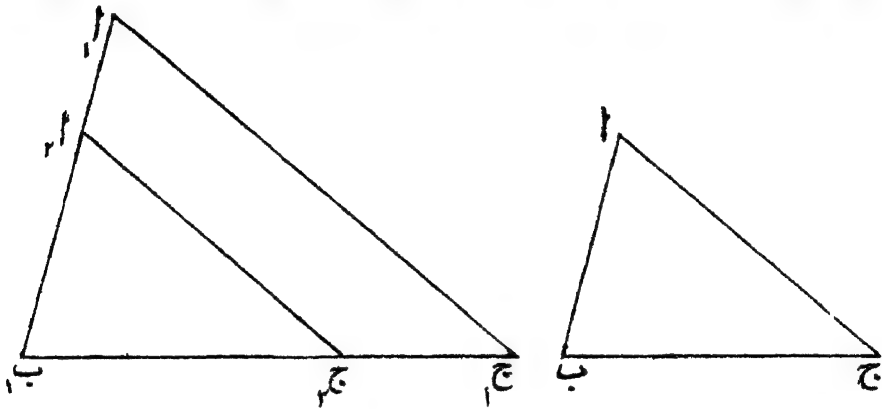
(۱) یعنی $\frac{ب}{ب} = \frac{ج}{ج}$

(۲) اسی طرح سے ثابت ہو سکتا ہے کہ $\frac{ا}{ا} = \frac{ب}{ب}$

(۱) اور (۲) سے حاصل ہوتا ہے کہ $\frac{ب}{ج} = \frac{ج}{ا} = \frac{ا}{ب}$

ثابت کرنا تھا۔

۲۴۔ مسئلہ۔ اگر ایک مثلث کے تین ضلع دوسرے مثلث کے تین ضلعوں کے تناسب ہوں تو متناظر اضلاع کے مقابل کے زاویے مساوی ہونگے۔



مثلثات $ا ب ج$ اور $ا ب ج$ میں $\frac{ب}{ج} = \frac{ج}{ا} = \frac{ا}{ب}$

ثابت کرنا ہے کہ $ا > ا$ ، $ب > ب$ اور (لازمًا) $ج > ج$

بہاؤ پر نقطہ $ا$ ایسا لو کہ $ب ا = ب ا$ اور $ب ج$ پر نقطہ $ج$ ایسا لو کہ $ب ج = ب ج$ ۔

ج کو ملاؤ۔

چونکہ حسب مفروض $\frac{ب}{ج} = \frac{ا}{ب}$

اس لیے $\frac{ب}{ج} = \frac{ا}{ب}$ (حسب عمل)

اس لیے $a : b :: c : d$

یعنی مثلثات $b : a :: c : d$ اور $b : a :: c : d$ میں $b : a :: c : d = b : a :: c : d$

اور $b : a :: c : d = b : a :: c : d$

اس لیے یہ مثلثات متساوی الزوایا ہیں۔

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{d} \quad \text{اس لیے}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{d} \quad \text{یعنی}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{d} \quad \text{لیکن حسب مفروض}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{d} \quad \text{اس لیے یعنی } a : b = c : d$$

اس لیے مثلث $b : a :: c : d$ کے ضلع بالترتیب مثلث $b : a :: c : d$ کے ضلعوں کے مساوی ہیں۔

اس لیے یہ مثلثات آپس میں ہر طرح سے مساوی ہیں۔

$$\text{اس لیے } a : b = c : d = b : a :: c : d$$

$$\text{اور } a : b = c : d = b : a :: c : d$$

$$\text{اور } a : b = c : d$$

پس ثابت ہوا کہ مثلثات $a : b :: c : d$ اور $b : a :: c : d$ متساوی الزوایا ہیں۔

۲۵۔ متشابه اشکال پر نوٹ۔ تعریف سے ظاہر ہے کہ

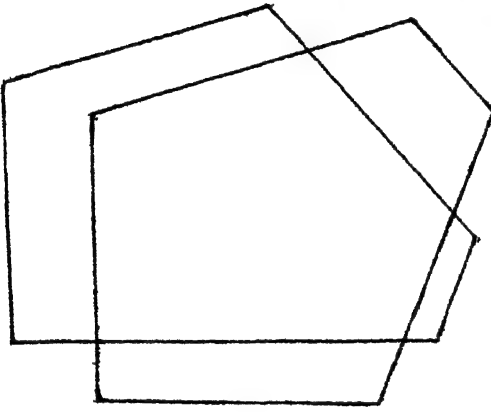
متشابه اشکال کے لیے دو شرائط کا ایک ساتھ پورا ہونا ضروری ہے۔

(۱) ایک شکل کے زاویے ایک ہی ترتیب میں جدا جدا دوسری شکل

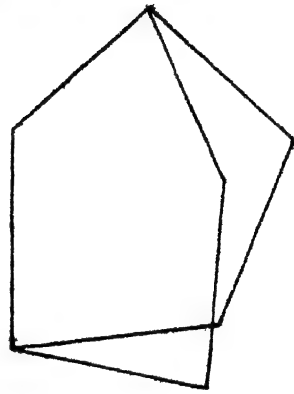
کے زاویوں کے مساوی ہوں۔

(۲) ایک شکل کے ضلعے متناسب ہوں دوسری شکل کے نظیر کے ضلعوں کے ۔

ونفاۃ ۲۳ اور ۲۴ سے ظاہر ہے کہ مثلثات کی صورت میں مندرجہ بالا شرائط میں سے کسی ایک شرط کے پورا ہونے پر دوسری شرط لازماً خود بخود پوری ہوتی ہے لیکن ہمیں سے زیادہ ضلعوں والی اشکال کی صورت میں ان کے باہم تشابہ ہونے کے لیے دونوں شرائط کا ایک ساتھ پورا ہونا ضروری ہے ۔
اس امر کی توضیح اشکال ذیل سے ہوتی ہے ۔



شکل ۱۔



شکل ۲۔

شکل ۱ میں ایسے دو کثیر الاضلاع دیے گئے ہیں جو شرط (۱) کو پورا کرتے ہیں اور شرط (۲) کو پورا نہیں کرتے ۔ شکل سے ظاہر ہے کہ یہ کثیر الاضلاع متشابه نہیں ہیں ۔

شکل ۲ میں ایسے دو کثیر الاضلاع دیے گئے ہیں جو شرط (۲) کو پورا کرتے ہیں لیکن شرط (۱) کو پورا نہیں کرتے ۔ شکل سے ظاہر ہے کہ یہ کثیر الاضلاع بھی متشابه نہیں ہیں ۔

اس امر کی ایک آسان مثال ذیل میں درج ہے ۔
ایک مربع اور مستطیل متساوی الزوایا ہیں لیکن ان کے نظیر کے اضلاع متناسب نہیں ہیں ۔ اس لیے یہ دو اشکال متشابه نہیں ہیں ۔ نیز ایک مربع اور مہین میں ضلعے متناسب ہیں لیکن اشکال متساوی الزوایا نہیں ہیں اس لیے یہ بھی متشابه نہیں ہیں ۔

کھینچا گیا ہے جو $\frac{1}{2}$ پر عمود ہے اور $\frac{1}{2}$ ج سے بالترتیب $\frac{1}{2}$ ج پر ملتا ہے
ثابت کرو کہ $\frac{1}{2}$ ج \times $\frac{1}{2}$ ج = $\frac{1}{2}$ ج

(۸) مثلث $\frac{1}{2}$ ج کے رأسوں سے مقابل کے اضلاع پر عمود $\frac{1}{2}$ ج
ج ف نکالے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلثات $\frac{1}{2}$ ج ف، $\frac{1}{2}$ ج د ف، $\frac{1}{2}$ ج د ع میں سے
ہر ایک مثلث $\frac{1}{2}$ ج کے متشابه ہے۔ اس کی مدد سے مثلث $\frac{1}{2}$ ج د ف کے
اضلاع کے طول مثلث $\frac{1}{2}$ ج کے اضلاع اور زاویوں کی رقوم میں معلوم کرو۔
[جواب $\frac{1}{2}$ ج = $\frac{1}{2}$ ج]

(نوٹ - مثلث $\frac{1}{2}$ ج د ف کو مثلث $\frac{1}{2}$ ج کا مثلث پائین کہتے ہیں)۔

(۹) مثلث $\frac{1}{2}$ ج بناؤ جس میں $\frac{1}{2}$ ج = $\frac{1}{2}$ ج، $\frac{1}{2}$ ج = $\frac{1}{2}$ ج، $\frac{1}{2}$ ج = $\frac{1}{2}$ ج اور
محیط $\frac{1}{2}$ ج = $\frac{1}{2}$ ج کے طول محسوب کرو۔ [جواب $\frac{1}{2}$ ج = $\frac{1}{2}$ ج، $\frac{1}{2}$ ج = $\frac{1}{2}$ ج، $\frac{1}{2}$ ج = $\frac{1}{2}$ ج]

(۱۰) مثلث $\frac{1}{2}$ ج میں $\frac{1}{2}$ ج قائم ہے اور $\frac{1}{2}$ ج وتر $\frac{1}{2}$ ج پر عمود ہے
ثابت کرو کہ مثلثات $\frac{1}{2}$ ج د، $\frac{1}{2}$ ج ا د، $\frac{1}{2}$ ج ب ا باہم متشابه ہیں اور اس کی مدد سے
ثابت کرو کہ

$$(۱) \frac{1}{2} ج = \frac{1}{2} ج \times \frac{1}{2} ج$$

$$(۲) \frac{1}{2} ج = \frac{1}{2} ج \times \frac{1}{2} ج$$

$$(۳) \frac{1}{2} ج = \frac{1}{2} ج \times \frac{1}{2} ج$$

$$(۴) \frac{1}{2} ج = \frac{1}{2} ج + \frac{1}{2} ج$$

$$(۵) \frac{1}{2} ج : \frac{1}{2} ج = \frac{1}{2} ج : \frac{1}{2} ج$$

(۱۱) مثلث $\frac{1}{2}$ ج میں $\frac{1}{2}$ ج عمود ہے $\frac{1}{2}$ ج پر اور $\frac{1}{2}$ ج مثلث $\frac{1}{2}$ ج
کے حائط دائرہ کا قطر ہے، ثابت کرو کہ مثلثات $\frac{1}{2}$ ج د اور $\frac{1}{2}$ ج ب باہم متشابه ہیں
اور اس سے اخذ کرو کہ $\frac{1}{2} ج \times \frac{1}{2} ج = \frac{1}{2} ج \times \frac{1}{2} ج$

(۱۲) مثلث $\frac{1}{2}$ ج کے زاویہ $\frac{1}{2}$ کا اندرونی ناصف ضلع $\frac{1}{2}$ ج سے لاپر اور۔

مثلث $\frac{1}{2}$ ج کے حائط دائرہ سے ماہر ملتا ہے، ثابت کرو کہ مثلثات $\frac{1}{2}$ ج کا

اور $\frac{1}{2}$ ج باہم متشابه ہیں اور اس سے اخذ کرو کہ $\frac{1}{2} ج \times \frac{1}{2} ج = \frac{1}{2} ج \times \frac{1}{2} ج$

(۱۳) ایک شخص جس کا قد ۶ فٹ ہے ایک روشنی کے کنبے سے ۳۲ فٹ کے

فاصلہ پر کھڑا ہے اور اُس کے سایہ کا طول ۸ فٹ ہے۔ بتاؤ کہ روشنی زمین سے کتنی بلندی پر ہے۔ [جواب ۳۱ فٹ]

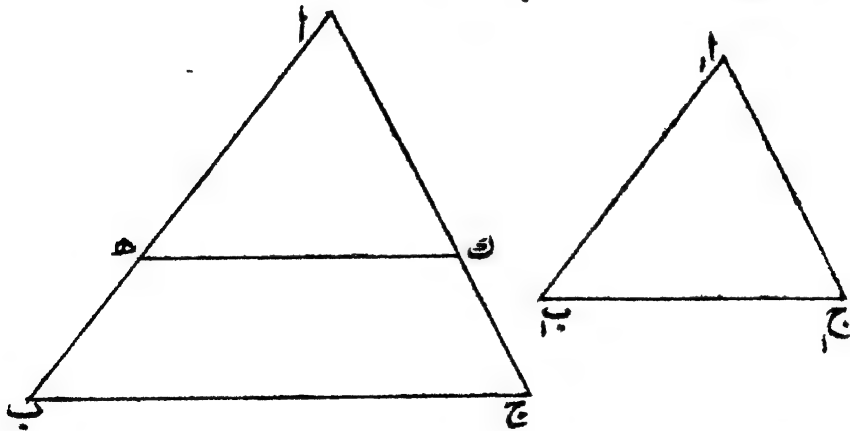
(۱۳) ایک شخص ایک نہر کی چوڑائی معلوم کرنا چاہتا ہے۔ اُس نے نہر کے ایک کنارہ پر ۱۴ فٹ اونچی سلاخ نصب کی۔ پھر وہ اس کنارہ سے عموداً ۲۰ فٹ پیچھے بٹھا تو سلاخ کی چوٹی اور مقابل کا کنارہ ایک سیدھ میں دکھائی دیے۔ اگر اُس شخص کی آنکھ کی

اونچائی ۵ فٹ ۸ انچ ہو تو نہر کی چوڑائی معلوم کرو۔ [جواب ۶۰ فٹ]

(۱۵) دو انتصابی کعبے ۵ فٹ اور ۱۲ فٹ اونچے ہیں۔ ہر ایک کی چوٹی کو دوسرے کعبے کے قعر سے رسیوں کے ذریعہ ملا لیا گیا ہے۔ رسیوں کے نقطہ تقاطع کی بلندی سطح زمین سے معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ بلندی کعبوں کے درمیانی فاصلہ پر منحصر نہیں ہے۔

[جواب $\frac{2}{3}$ فٹ]

۲۶۔ مسئلہ۔ اگر دو مثلثوں میں ایک مثلث کا ایک زاویہ دوسرے مثلث کے ایک زاویہ کے مساوی ہو اور ان مساوی زاویوں کے گرد کے اضلاع متناسب ہوں تو مثلثات متشابه ہوں گے۔



مثلثات $\triangle ABC$ اور $\triangle DEF$ میں $\angle A = \angle D$ اور

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$$

اب پر نقطہ H ایسا کہ $AB = AH$ اور AC پر نقطہ K ایسا کہ

اک = ا ج -

ہک کو ملاؤ -

مثلثات اہک، اب ج میں

$$ا > ا = ا >$$

$$ا ب = ا ب$$

$$اور ا ک = ا ج$$

$$ب ا ہک = ا ب ج$$

$$حسب مفروض $\frac{ا ب}{ا ج} = \frac{ا ج}{ا ب}$$$

$$اس لیے $\frac{ا ب}{ا ج} = \frac{ا ج}{ا ب}$ حسب عمل$$

اس لیے ہک متوازی ہے ب ج کے

$$اس لیے ا ب ج = ا ب ج = ا ہک = ا ب ج$$

$$اور ا ج ب = ا ج ب = ا ک ہ = ا ج ب$$

اس لیے مثلثات اب ج اور ا ب ج مساوی الزوایا میں لہذا متشابه ہیں۔ یہی ثابت کرنا تھا۔

امثلہ

(۱) مثلث اب ج میں کوئی خط مستقیم قاعدہ کے متوازی ہے اور باقی

اضلاع سے لایا اور ما پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ اسے گزرنے والا وسطانیہ خط لایا کی تنصیف کرتا ہے۔

(۲) مثلثات اب ج اور ا ب ج متشابه ہیں۔ ثابت کرو کہ

ان کے حائط دائروں کے نصف قطروں کی نسبت نظیر کے اضلاع کی نسبت کے مساوی ہے۔

(۳) ثابت کرو کہ متشابہ مثلثات میں نظیر کے رؤسوں سے مقابل کے اضلاع پر نکالے ہوئے عمودوں کی نسبت نظیر کے ضلعوں کی نسبت کے مساوی ہے۔
(۴) ثابت کرو کہ متشابہ مثلثات کے اندرونی دائروں کے نصف قطروں کی نسبت نظیر کے ضلعوں کی نسبت کے مساوی ہے۔

(۵) ثابت کرو کہ مثلث کے ضلعوں کے وسطی نقطوں میں سے گزرنے والے دائرہ کا قطر مثلث کے حائل دائرہ کے نصف قطر کے مساوی ہے۔

(۶) مثلث ا ب ج مساوی الاضلاع ہے۔ ہر ضلع کا طول $\sqrt{3}$ ہے۔ ضلع ب ج کو دونوں جانب خارج کر کے اس پر دو نقطے ن اور ق ایسے لیے گئے ہیں کہ ب ن = ج ق = $\sqrt{3}$ اور ا ن اور ا ق کو ملایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ
(۱) ن ق : ن ا = ن ا : ن ب
(۲) ن ا = $\frac{1}{2}$ ن ب

(۷) دو دائرے جن کے نصف قطر لم اور لم ہیں ایک دوسرے کو نقطہ ا پر خارجاً مس کرتے ہیں۔ اور ان دائروں کا ایک مشترک مماس ا ن کو ف اور ق پر مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ $\angle ف ا ق$ قائم ہے۔

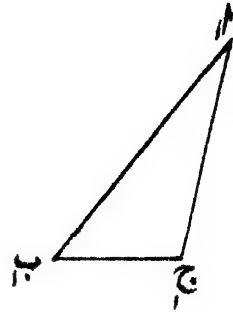
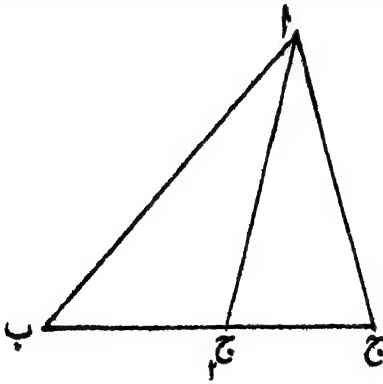
اور $\angle ق ا ف = 90^\circ$
(۸) دو دائرے ایک دوسرے کو ا پر خارجاً مس کرتے ہیں اور ان کا ایک مشترک مماس ف ق مرکزوں کے خط سے س پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ (۱) مثلثات س ا ف اور س ق ا متشابہ ہیں۔

$$(۲) س ا = س ق \times س ف$$

$$(۹) \text{ مثلثات ا ب ج اور ا ب ج میں } \frac{ا ب}{ا ج} = \frac{ا ب}{ا ج}$$

اور $\angle ب = \angle ب$ ، اگر $\angle ج \neq \angle ج$ تو ثابت کرو کہ

$$\angle ج + \angle ج = 180^\circ$$



چونکہ $\angle ج > \angle ج$ اس لیے $\angle ا > \angle ا$
 اب 'ا' میں سے ایک خط 'ا ج' ایسا کھینچو کہ $\angle ب ا ج = \angle ب ا ج$
 فرض کرو کہ 'ا ج' 'ب ج' سے پرمتا ہے۔

اب مثلثات 'ا ب ج' اور 'ا ب ج' متشابه ہیں۔

$$\text{اس لیے } \frac{ا ج}{ا ج} = \frac{ا ب}{ا ب}$$

$$\text{لیکن دیا گیا ہے کہ } \frac{ا ج}{ا ج} = \frac{ا ب}{ا ب}$$

$$\text{یعنی } \frac{ا ج}{ا ج} = \frac{ا ج}{ا ج} \text{ یعنی } ا ج = ا ج$$

$$\text{اس لیے } \angle ا ج ج = \angle ا ج ج$$

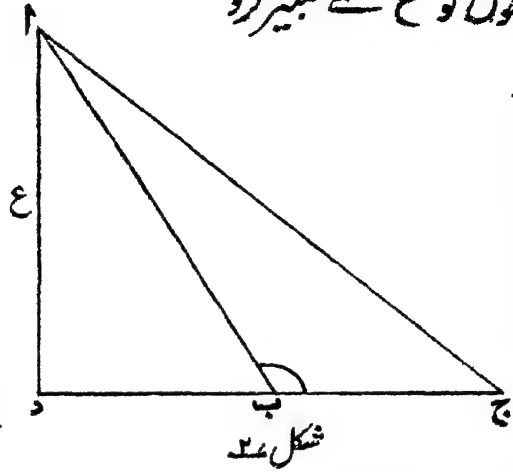
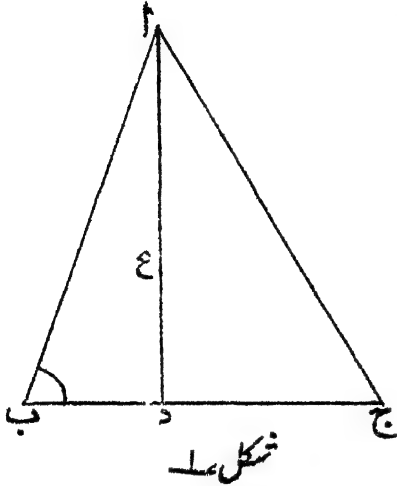
$$\text{اس لیے } \angle ا ج ب + \angle ا ج ج = ۲ \text{ قاعدے۔}$$

$$\text{لیکن } \angle ا ج ب = \angle ا ج ج$$

$$\text{اس لیے } \angle ا ج ب + \angle ا ج ج = ۲ \text{ قاعدے۔}$$

۳۷۔ بعض ہندسی نتائج کو مثلثی نسبتوں کے استعمال سے نہایت عمدہ طور پر بیان کیا جاسکتا ہے۔

(۱) مثلث ABC میں AD عمود ہے B پر۔ AD کے طول کو E سے تعبیر کرو



تب $E = BC$ جب $AB > AD$
 شکل ۱ میں $AB > AD = DB$ اور شکل ۲ میں
 $AB > AD = 180^\circ - B$

اس لیے دونوں صورتوں میں جب $AB > AD = BC$ جب B
 $\therefore E = BC$ جب B

اسی طرح سے $E = BC$ جب B

$$\therefore \frac{E}{BC} = \frac{AB}{BC}$$

اسی طرح سے ثابت ہو سکتا ہے کہ $\frac{E}{BC} = \frac{AB}{BC}$

$$\therefore \frac{E}{BC} = \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{BC}$$

یعنی کسی مثلث کے اضلاع متقابل کے زاویوں کی جیب کے تناسب ہوتے ہیں۔

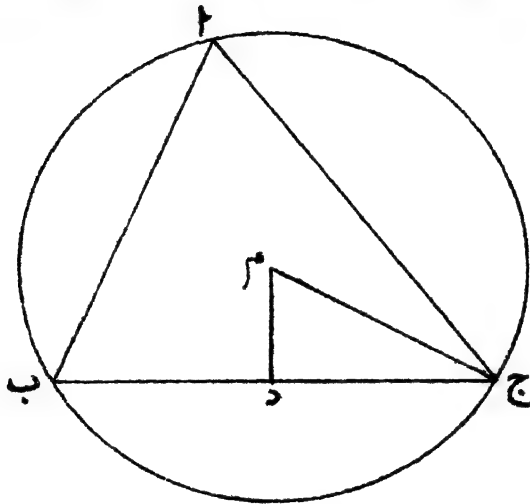
(۲) مثلث ا ب ج کا رقبہ $\Delta = \frac{1}{2} \times \text{ا ب} \times \text{ج د}$ (دیکھو شکل بالا)

$$\frac{1}{2} \times \text{ا ب} \times \text{ج د} = \Delta$$

اسی طرح سے $\Delta = \frac{1}{2} \times \text{ب ج} \times \text{ا د} = \frac{1}{2} \times \text{ج د} \times \text{ا ب}$ جب ب

پس حاصل ہوا کہ $\Delta = \frac{1}{2} \times \text{ا ب} \times \text{ج د} = \frac{1}{2} \times \text{ب ج} \times \text{ا د} = \frac{1}{2} \times \text{ج د} \times \text{ا ب}$ جب ب

(۳) مثلث ا ب ج کے حاطہ دائرہ کا مرکز م ہے، نصف قطر م ج کو



سما سے تعبیر کرو۔ فرض کرو کہ ب ج کا وسطی نقطہ د ہے۔ تب $\Delta = \frac{1}{2} \times \text{ب ج} \times \text{ا د}$ قائم ہے

اور $\Delta = \frac{1}{2} \times \text{ب ج} \times \text{ا د}$

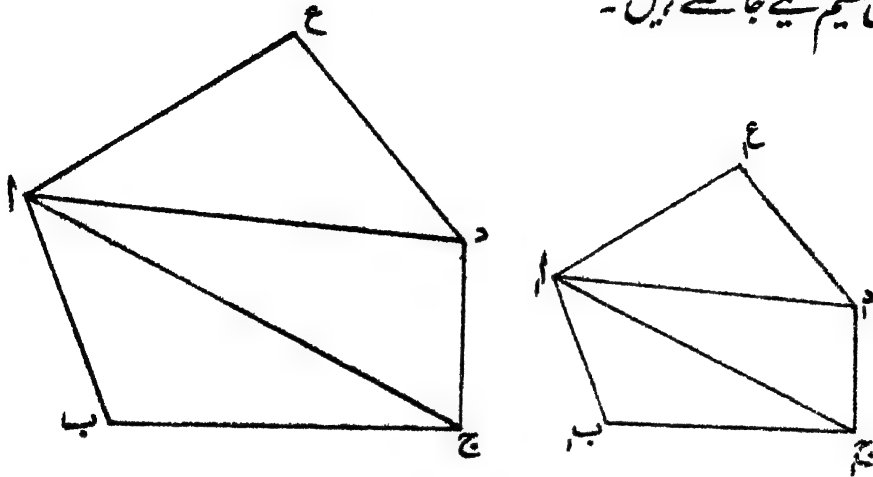
$$\text{اس لیے } \frac{\Delta}{\text{ب ج}} = \frac{\text{ا د}}{2}$$

$$\text{یعنی } \frac{\Delta}{\text{ب ج}} = \frac{\text{ا د}}{2}$$

$$\therefore \frac{\Delta}{\text{ب ج}} = \frac{\text{ا د}}{2} = \frac{\text{ا ب} \times \text{ج د}}{2 \times \text{ب ج}} = \frac{\text{ا د}}{2}$$

نوٹ: شکل بالا میں مثلث ا ب ج کے تمام زاویے حاقہ لیے گئے ہیں۔

کسی ایک زاویہ کے منفرجہ یا قائمہ ہونے کی صورت میں طالب علم خود اس نتیجہ کو حاصل کرے۔
 ۲۸۔ مسئلہ۔ دو متشابه کثیر الاضلاع متشابه مثلثوں کی ایک ہی تعداد میں تقسیم کیے جاسکتے ہیں۔



کثیر الاضلاع ا ب ج د ع اور ا ب ج د ع باہم متشابه ہیں۔ ثابت
 کرنا ہے کہ ان میں سے ہر ایک کو ایک ہی تعداد کے متشابه مثلثوں میں تقسیم
 کیا جاسکتا ہے۔
 ا ج، ا د، ا ج، ا د کو بلاؤ۔

چونکہ کثیر الاضلاع متشابه ہیں

$$\text{اس لیے } \frac{ا ب}{ا ب'} = \frac{ب ج}{ب ج'} \text{ اور } \frac{ب ج}{ب ج'} = \frac{ب د}{ب د'}$$

اس لیے مثلثات ا ب ج اور ا ب ج' متشابه ہیں۔

$$\text{اس لیے } \frac{ب ج}{ب ج'} = \frac{ب د}{ب د'}$$

$$\text{اور } \frac{ج د}{ج د'} = \frac{ج د}{ج د'}$$

(کیونکہ کثیر الاضلاع متشابه ہیں)

$$\frac{ج د}{ج د'} =$$

نیز چونکہ $\frac{ب}{ج} = \frac{د}{ج}$ اور $\frac{ب}{ج} = \frac{د}{ج}$

اس لیے $\frac{ب}{ج} = \frac{د}{ج}$ اور $\frac{ب}{ج} = \frac{د}{ج}$

اب مثلثات $اجد$ اور $ابج$ میں

$$\frac{اج}{ج} = \frac{اد}{ج}$$

$$\frac{اج}{ج} = \frac{اد}{ج}$$

اس لیے مثلثات $اجد$ اور $ابج$ باہم متشابہ ہیں۔

اسی طرح سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ مثلثات $ادع$ اور $امع$

بھی متشابہ ہیں۔

پس ثابت ہوا کہ متشابہ کثیر الاضلاع $ابج$ $دع$ اور $ابج$ $دع$ کو ایک ہی تعداد کے متشابہ مثلثوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے۔

نوٹ (۱)۔ اوپر کی شکل میں کثیر الاضلاع کے ضلعوں کی تعداد پانچ ہے اُس صورت میں جب کہ کثیر الاضلاع میں ضلعوں کی تعداد پانچ سے زیادہ ہو اسی قسم کے استدلال سے مسئلہ بالاثبات ہو سکتا ہے۔

نوٹ (۲)۔ اس ثبوت میں ضمنی طور پر یہ بھی ثابت ہو گیا ہے کہ

$$\frac{ب}{ج} = \frac{اج}{ج} = \frac{اد}{ج}$$

نوٹ (۳)۔ متناظر اُسوں ۱ اور ۱ کی بجائے کسی اور دو متناظر اُسوں سے خطوط کھینچ کر کثیر الاضلاعوں کو متشابہ مثلثوں کی ایک ہی تعداد میں تقسیم کیا جاسکتا ہے۔

۲۹۔ مسئلہ۔ دو (غیر مساوی) متشابہ کثیر الاضلاعوں کو اس طرح رکھا جاسکتا ہے کہ ان کے متناظر اُسوں کو ملانے والے خط ایک ہی نقطہ میں سے گزریں۔

دو غیر مساوی متشابہ کثیر الاضلاع $ابج$ $دع$ اور $ابج$ $دع$ کو اس طرح رکھا گیا ہے کہ نظیر کے ضلع $اب$ ، $اب$ ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔ (ظاہر ہے کہ نظیر کے ضلعوں کے دوسرے جوڑے بھی

لیکن $\frac{ب ج}{ب ا ج} = \frac{ا ب}{ا ب}$
 اب مثلثات ش ب ج اور ش ب ا ج میں
 $> ش ب ج = > ش ب ا ج$ (کیونکہ ب ج // ب ا ج)

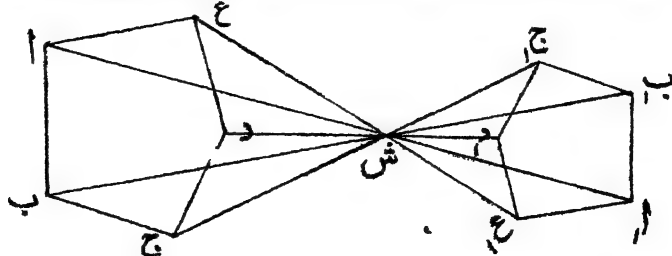
$$\frac{ب ج}{ب ا ج} = \frac{ش ب}{ش ب ا ج}$$

اس لیے مثلثات ش ب ج اور ش ب ا ج متشابه ہیں۔

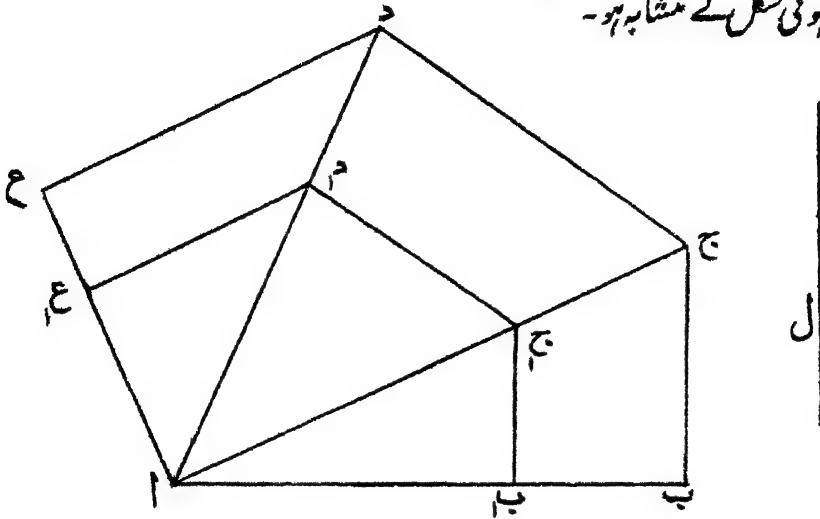
اس لیے $> ب ش ج = > ب ا ش ج$
 اس لیے خطوط ش ج اور ش ج ایک دوسرے پر منطبق ہیں۔
 یعنی متناظر رؤسوں ج ج کو ملانے والا خط نقطہ ش میں سے گزرتا ہے
 اسی طرح سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ خطوط د د اور ع ع بھی نقطہ ش میں
 سے گزرتے ہیں۔ پس ثابت ہوا کہ متناظر رؤسوں کو ملانے والے خط ایک ہی
 نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔

نوٹ (۱)۔ اگر دو متشابه کثیر الاضلاع اس طرح رکھے جائیں کہ نظیر کے ضلع متوازی
 ہوں تو یہ ہم وضع شکلیں کہلاتی ہیں اور ان کے نظیر کے نقطوں کو ملانے والے خطوط کا
 نقطہ تراکز ش ان ہم وضع متشابه اشکال کا مشابہت کا مرکز کہلاتا ہے۔
 نوٹ (۲)۔ اگر متشابه کثیر الاضلاعوں کو ہم وضع طور پر ایک دوسرے کے اندر
 رکھا جائے تو مشابہت کا مرکز دونوں شکلوں کے اندر ہوگا۔

نوٹ (۳)۔ دفعہ ہذا کے مسئلہ کو ثابت کرنے کے لیے جو شکلیں کھینچی گئی ہیں ان میں نظیر کے
 اضلاع اب، ا ب، ایک ہی سمت میں متوازی رکھے گئے ہیں۔ اگر نظیر کے اضلاع اب، ا ب،
 کو مخالف سمتوں میں متوازی رکھا جائے تو متعلقہ شکل حسب ذیل ہوگی۔



اس صورت میں نظیر کے رأسوں کو ملانے والے خط ایک ہی نقطہ میں سے گذرینگے۔
 ۱۔ ۱۔ مکملہ عملی۔ ایک دیے ہوئے ضلع پر ایک شکل کھینچنا جو ایک
 دی ہوئی شکل کے متشابه ہو۔



فرض کرو کہ ا ب ج د ع ایک دی ہوئی شکل ہے اور ل دیے ہوئے ضلع
 کا طول ہے ایک شکل بنانا ہے جو دی ہوئی شکل ا ب ج د ع کے متشابه ہو اور جس میں
 ا ب کے نظیر کے ضلع کا طول ل ہو۔ ا ج، ا د کو ملاؤ۔
 ا ب (محدودہ بشرط ضرورت) پر ایک نقطہ ب ایا لہ کہ ا ب = ل
 ب ج متوازی کھینچو ب ج کے جو ا ج سے ج پر ملے۔
 اور ج د متوازی کھینچو ج د کے جو ا د سے د پر ملے۔
 اور د ع متوازی کھینچو د ع کے جو ا ع سے ع پر ملے۔
 تب ا ب ج د ع مطلوبہ شکل ہوگی۔
 ثبوت متشابه مثلثوں کی مدد سے باسانی دیا جاسکتا ہے مشتق کے طور پر
 طالب علم ثبوت خود بہم پہنچائے۔

امثلہ

(۱) ذرا بقۃ الاضلاع ا ب ج د اور ا ب ج د متشابه ہونگے اگر

$$(۱) ۱ > ۱ = ۱ > ۱ \text{ اور } \frac{۱}{۱} = \frac{۱}{۱} = \frac{۱}{۱} = \frac{۱}{۱} = \frac{۱}{۱} = \frac{۱}{۱}$$

$$(۲) ۱ > ۱ = ۱ > ۱ \text{ اور } \frac{۱}{۱} = \frac{۱}{۱} = \frac{۱}{۱} = \frac{۱}{۱} = \frac{۱}{۱} = \frac{۱}{۱}$$

(۳) ذواربقت الاضلاع ۱ ب ج د کے متشابه ایک شکل بناؤ جس کے ہر ضلع کو اپنے نظیر کے ضلع کے ساتھ نسبت ۴:۳ ہو۔

(۴) ایک دیے ہوئے خط ۱ ب پر ایک نصف دائرہ بناؤ۔ اس نصف دائرہ کے اندر ایک مربع بناؤ جس کے دو راس ٹوس پر ہوں اور دو قطر پر۔ اگر ۱ ب کا طول ۲ ر ہو تو مربع کا ضلع معلوم کرو۔ (جواب $\frac{۲}{۵}$)

(۵) ۴ ر نصف قطر کا ایک قطاع دائرہ بناؤ جس کا مرکزی زاویہ ۹۰ ہو۔ اس کے اندر ایک مربع بناؤ اور مربع کے ضلع کا طول ۱۰ پاؤ اور حساب لگانے سے اپنے جواب کو جانچو۔ [جواب ۱۲ (۱۶-۳۶) انچ]

(۵) ایک منتظم سدس ۱ ب ج د ع ف بناؤ جس کے ہر ضلع کا طول ۲ دا ہو اور اس کے اندر ایک مربع بناؤ جس کے دو ضلع ۱ ب د ع کے متوازی ہوں اور اس کے راس باقی اضلاع پر ہوں۔

(۶) ایک دیے ہوئے مثلث کے اندر ایک ایسا مثلث بناؤ جو ایک اور دیے ہوئے مثلث کے متشابه ہو۔

(۷) ایک دیے ہوئے کثیر الاضلاع کے متشابه ایک ایسا کثیر الاضلاع بناؤ جس کا محیط دیا گیا ہے۔

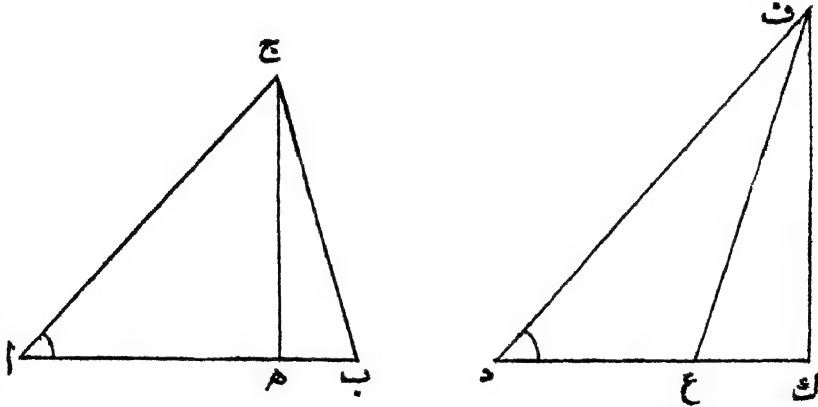
(۸) کثیر الاضلاع ۱ ب ج د ع کی سطح میں کوئی نقطہ و ہے۔ و ۱ ب و ج و د و ع کو بالترتیب نقاط ۱ ب ج د ع پر ایک ہی معلومہ نسبت میں تقسیم کیا گیا ہے ثابت کرو کہ کثیر الاضلاع ۱ ب ج د ع دیے ہوئے کثیر الاضلاع ۱ ب ج د ع کے متشابه ہے۔

(۹) کثیر الاضلاع ۱ ب ج د ع کی سطح میں کوئی نقطہ ہے اور و ایسا محدودہ پر کوئی نقطہ ۱ ب ج د ع پر کیا گیا ہے۔ ۱ ب ج د ع بالترتیب ۱ ب ج د ع کے

متوازی کھینچے گئے ہیں ج، د ب، وج، و د، و ع سے بالترتیب ب، ج، د، ع، پر ملتے ہیں۔ ا، ع کو ملایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ کثیر الاضلاع ا، ب، ج، د، ع کے متشابه ہے۔
(۱۰) ثابت کرو کہ مخروط مضلع کی کوئی مستوی تراشش جو قاعدہ کے متوازی ہو قاعدہ کے متشابه ہوتی ہے۔

(۱۱) متشابه مشترک المحيط شکلوں کے حائلہ دائروں کے قطر نظیر کے مضلعوں کی نسبت میں ہوتے ہیں۔

۳۔ مسئلہ۔ اگر ایک مثلث کا ایک زاویہ دوسرے مثلث کے ایک زاویہ کے مساوی ہو تو ان مثلثوں کے رقبے مساوی زاویوں کے گروہ کے مضلعوں کے حاصل ضربوں کے متناسب ہونگے۔



مثلث ا، ب، ج کا زاویہ ا مثلث د، ع، ف کے زاویہ د کے مساوی ہے۔

$$\text{نسبت کرنا ہے کہ } \frac{\Delta \text{ ا ب ج}}{\Delta \text{ د ع ف}} = \frac{\text{ا ب} \times \text{ج}}{\text{د ع} \times \text{ف}}$$

ج سے ا ب پر عمود جھ اور ف سے د ع پر عمود فک نکالو
مثلثات ج ا ہ، ف د ک متشابه ہیں

$$\text{اس لیے } \frac{\text{ج ا}}{\text{ف د}} = \frac{\text{ج ہ}}{\text{ف ک}}$$

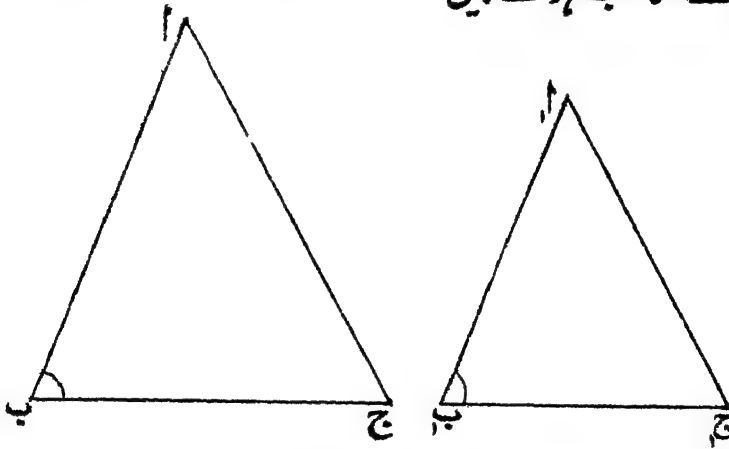
$$\triangle \text{ ا ب ج } = \frac{1}{4} \text{ ا ب } \times \text{ ج } \times \text{ ح}$$

$$\triangle \text{ د ع ف } = \frac{1}{4} \text{ د ع } \times \text{ ف } \times \text{ ک}$$

$$\therefore \frac{\triangle \text{ ا ب ج }}{\triangle \text{ د ع ف }} = \frac{\text{ا ب } \times \text{ ج } \times \text{ ح}}{\text{د ع } \times \text{ ف } \times \text{ ک}} \quad \left[\text{کیونکہ } \frac{\text{ج } \times \text{ ح}}{\text{ف } \times \text{ ک}} = \frac{\text{ا ج }}{\text{د ف }} \right]$$

نوٹ - اس مسئلہ کا متبادل ثبوت دفعہ ۲۷ مثال ۲ کے نتیجہ کی مدد سے حاصل کرو۔
نتیجہ صریح - اگر ایک متوازی الاضلاع کا ایک زاویہ دوسرے متوازی الاضلاع کے ایک زاویہ کے مساوی ہو تو ان کے رقبے مساوی زاویوں کے گرد کے ضلعوں کے حاصل ضربوں کے متناسب ہونگے۔

۳۲ - مسئلہ - متشابه مثلثوں کے رقبے متناظر اضلاع کے مربعوں کے متناسب ہوتے ہیں۔



مثلثات ا ب ج اور ا ب ج، متشابه ہیں۔

$$\frac{\text{ا ب}}{\text{ا ب}} = \frac{\triangle \text{ ا ب ج }}{\triangle \text{ ا ب ج }} \quad \text{ثابت کرنا ہے کہ}$$

چونکہ مثلثات ا ب ج اور ا ب ج، متشابه ہیں اس لیے $\text{ا ب} = \text{ا ب}$

$$\text{اور } \frac{\text{ب ج }}{\text{ب ج }} = \frac{\text{ا ب }}{\text{ا ب }} \quad \dots \dots \dots (۱)$$

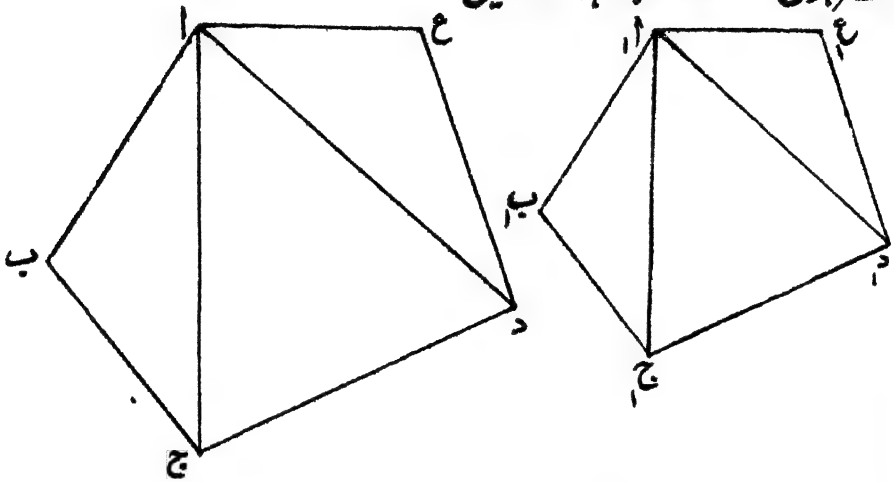
$$\frac{ا ب \times ب ج}{ا ب \times ا ب ج} = \frac{\triangle ا ب ج}{\triangle ا ب ج}$$

$$(۱) \frac{ا ب}{ا ب} \times \frac{ا ب}{ا ب} =$$

$$= \frac{ا ب^۲}{ا ب^۲}$$

جو ثابت کرنا تھا۔

۳۳۔ مسئلہ - متشابه کثیر الاضلاعوں کے رقبے متناظر اضلاع کے مربعوں کے تناسب ہوتے ہیں۔



کثیر الاضلاع ا ب ج د ع اور ا ب ج د ع متشابه ہیں
 ثابت کرنا ہے کہ $\frac{\text{شکل ا ب ج د ع کا رقبہ}}{\text{شکل ا ب ج د ع کا رقبہ}} = \frac{ا ب^۲}{ا ب^۲}$
 ا ج، ا د، اور ا ج، ا د کو ملاؤ۔

چونکہ مثلثات ا ب ج اور ا ب ج، متشابه ہیں

$$(۱) \dots\dots\dots \frac{ا ب}{ا ب} = \frac{\triangle ا ب ج}{\triangle ا ب ج}$$

نیز چونکہ مثلثات ا ج د اور ا ج د، متشابه ہیں

اس لیے $\frac{\Delta ا ب ج}{\Delta ا ب د} = \frac{ج د}{ج د}$ (۲)

نیز چونکہ مثلثات ا د ع اور ا د م متشابه ہیں

اس لیے $\frac{\Delta ا د ع}{\Delta ا د م} = \frac{د ع}{د م}$ (۳)

چونکہ کثیر الاضلاع ا ب ج د ع اور ا ب ج د م متشابه ہیں

اس لیے $\frac{ا ب}{ا ب} = \frac{ج د}{ج د} = \frac{د ع}{د م}$

اس لیے $\frac{ا ب}{ا ب} = \frac{ج د}{ج د} = \frac{د ع}{د م}$ (۴)

نتائج (۱) (۲) (۳) (۴) کو ملائے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{ا ب}{ا ب} = \frac{\Delta ا ب ج}{\Delta ا ب ج} = \frac{\Delta ا ب ج}{\Delta ا ب ج} = \frac{\Delta ا ب ج}{\Delta ا ب ج}$$

$$\frac{\Delta ا ب ج + \Delta ا ب ج + \Delta ا ب ج}{\Delta ا ب ج + \Delta ا ب ج + \Delta ا ب ج} =$$

$$= \frac{\text{شکل ا ب ج د ع کا رقبہ}}{\text{شکل ا ب ج د م ع کا رقبہ}}$$

یہ ثابت کرنا تھا۔

مشکل ۶

(۱) مثلث ا ب ج میں اضلاع ا ب، ا ج کے وسطی نقطے د ا و ع ہیں۔

ثابت کرو کہ $\Delta ا د ع$ کا رقبہ نصف $\Delta ا ب ج$ کے رقبہ کا $\frac{1}{4}$ ہے۔

(۲) ایک مثلث کے ضلعوں کے وسطی نقطوں کو ملائے سے جو مثلث بنتا ہے

اُس کا رقبہ دیئے ہوئے مثلث کے رقبہ کا کونسا حصہ ہے؟ (جواب $\frac{1}{4}$ حصہ)

(۳) مثلث ا ب ج میں قاعدہ ب ج کے متوازی خط لا ما اس طرح

کھینچو کہ \triangle ا کا ما کا رقبہ منصرف ل ا ب ما ج کے رقبہ کا $\frac{9}{4}$ ہے۔
[اشارہ - ا کا : اب = ۳ : ۲]

(۴) مثلث ا ب ج میں زاویہ ا قائمہ ہے اور ا د عمود ہے ب ج پر۔

ثابت کرو کہ \triangle ب ا د : \triangle ا ج د = اب : ا ج^۲
(۵) متشابه مشترک محیط شکلوں کے رقبے ان کے حائط دائروں کے قطروں کے

مربعوں کے متناسب ہوتے ہیں۔

(۶) ایک دائرہ کے اندر بنے ہوئے منتظم سدس کا رقبہ اس دائرہ کے گرد بنے ہوئے منتظم سدس کے رقبہ کا $\frac{3}{4}$ ہے۔

(۷) منصرف ا ب ج د کے اضلاع اب، ج د باہم متوازی ہیں۔ ا ج اور ب د ایک دوسرے کو و پر قطع کرتے ہیں۔ اگر اب : ج د = ۳ : ۲ تو مثلثات و ا ب اور و ج د کے رقبوں کی نسبت معلوم کرو۔ (جواب $\frac{4}{9}$)

(۸) مثلث ا ب ج میں \angle ا = ۹۰° اور ب ع اور ج ف بالترتیب اضلاع ا ج، اب پر عمود ہیں ثابت کرو کہ مثلث ا ع ف کا رقبہ مثلث ا ب ج کے رقبہ کا $\frac{1}{4}$ ہے۔

(۹) ثابت کرو کہ متشابه مثلثوں کے رقبوں میں وہی نسبت ہے جو

(۱) متناظر ارتفاعوں کے مربعوں میں ہے

(۲) متناظر وسطانیوں کے مربعوں میں ہے

(۳) اندرونی دائروں کے قطروں کے مربعوں میں ہے

(۴) حائط دائروں کے قطروں کے مربعوں میں ہے۔

۳۴۔ مسئلہ عملی۔ ایک کثیرالاضلاع بنا نا جو ایک دیے ہوئے کثیرالاضلاع کے متشابه ہو اور جس کے رقبہ کو دیے ہوئے کثیرالاضلاع کے رقبہ کے ساتھ ایک معلوم نسبت م : ن ہو۔

فرض کرو کہ دیا ہوا کثیرالاضلاع ا ب ج د ع ہے اب پر نقطہ ف ایسا معلوم کرو کہ

$$\frac{اف}{اب} = \frac{م}{ن}$$

$$\frac{ا ب}{ا ب} = \frac{ل}{ل} \text{ اور } ا ب \text{ پر ایک شکل } ا ب ج د ع \dots$$

بناؤ جو شکل ش کے متشابه ہو اور جن میں ا ب اور ا ب تناظر ضلعے ہوں
تب ا ب ج د ع.... مطلوبہ شکل ہوگی

$$\frac{\text{شکل } ا ب ج د ع \dots \text{ کا رقبہ}}{\text{شکل ش کا رقبہ}} = \frac{ا ب}{ل} = \frac{ل}{ل} = \frac{\text{شکل ع کا رقبہ}}{\text{شکل ش کا رقبہ}}$$

اس لیے شکل ا ب ج د ع.... کا رقبہ = شکل ع کا رقبہ

امثلہ

(۱) ایک مساوی الاضلاع مثلث بناؤ جو رقبہ میں ایک دیے ہوئے مثلث کے مساوی ہو۔

(۲) ایک مثلث مساوی الاضلاع بناؤ جس کا رقبہ دو دیے ہوئے مساوی الاضلاع مثلثوں کے رقبوں کے مجموعہ کے مساوی ہو۔

(۳) ایک مثلث بناؤ جس کے اضلاع ۴ : ۵ : ۷ کے تناسب ہوں اور جس کا رقبہ ۵ مربع انچ ہو۔

(۴) ذواربعتہ الاضلاع ا ب ج د بناؤ جس میں ا ب = ۴ سمر، ب ج = ۵ سمر، د = ۵ سمر اور ۱ = ۹۰ اس کے متشابه ایک ذواربعتہ الاضلاع بناؤ جس کا رقبہ ۲ ضلع پر کے مساوی الاضلاع مثلث کے رقبہ کے مساوی ہو۔

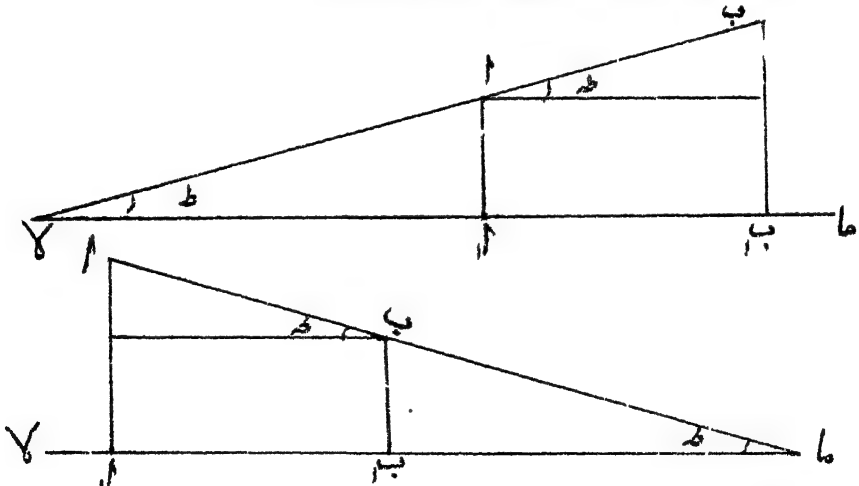
(۵) ایک شکل معین بناؤ جس کا ایک زاویہ ۶۰ کا ہو اور جس کا رقبہ ۲ ضلع پر بنے ہوئے منتظم مسدس کے رقبہ کے مساوی ہو۔

(۶) ایک متساوی الساقین مثلث بناؤ جس کا راسی زاویہ ۵۰ کا ہو اور جس کا رقبہ اُس مثلث کے رقبہ کے مساوی ہو جس کے اضلاع ۴، ۴، ۵ ہیں۔

تیسرا باب

مثلث کے خواص

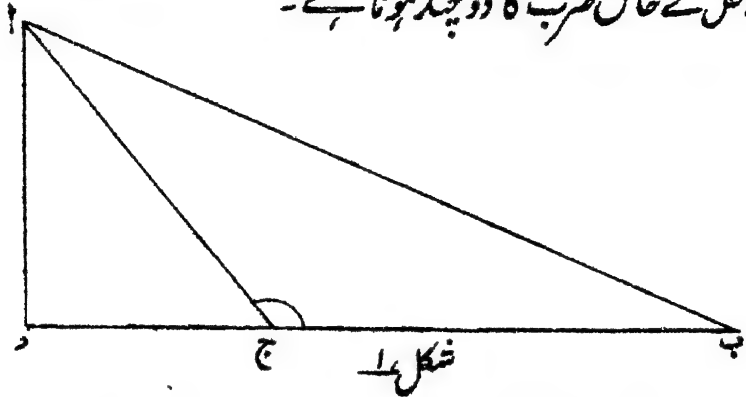
۳۶۔ تعریف۔ اگر ایک محدود خط ab کے سروں a اور b سے ایک معلومہ خط la ما پر عمود a ، a' b نکالے جائیں تو محدود خط ab معلومہ خط a کا ظل کہلاتا ہے خط la ما پر۔



اگر ab اور la کا درمیانی حادہ زاویہ θ ہو تو a b کا طول مساوی ہوگا a $b \times \sin \theta$

۳۷۔ مسئلہ۔ (فیثاغورث کے مسئلہ کی توسیع)

کسی مثلث کے ایک ضلع پر کا مربع بڑا ہوتا ہے، مساوی ہوتا ہے چھوٹا ہوتا ہے باقی دو ضلعوں کے مربعوں کے مجموعہ سے بموجب اس کے کہ ان ضلعوں کا درمیانی زاویہ منفرجہ ہو، قائمہ ہو یا حادہ ہو اور غیر مساوی ہونے کی صورت میں ان کا فرق دو ضلعوں میں سے ایک ضلع اور اس ضلع پر دوسرے ضلع کے ظل کے حاصل ضرب کا دو چند ہوتا ہے۔



صورت اول۔ فرض کرو کہ مثلث ABC میں $\angle C > \angle B$ منفرجہ ہے۔
۱ سے B ج مدد وہ پر عمود AD نکالو تب B ج د ظل ہے ج A کا خط
B ج پر۔

یہ ثابت کرنا ہے کہ $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot BC \cdot CD$
قائم الزاویہ مثلث ABC میں

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 = AD^2 + (BC - CD)^2$$

$$= AD^2 + BC^2 - 2 \cdot BC \cdot CD + CD^2$$

$$= AD^2 + BC^2 - 2 \cdot BC \cdot CD + CD^2$$

$$= AD^2 + BC^2 - 2 \cdot BC \cdot CD + CD^2$$

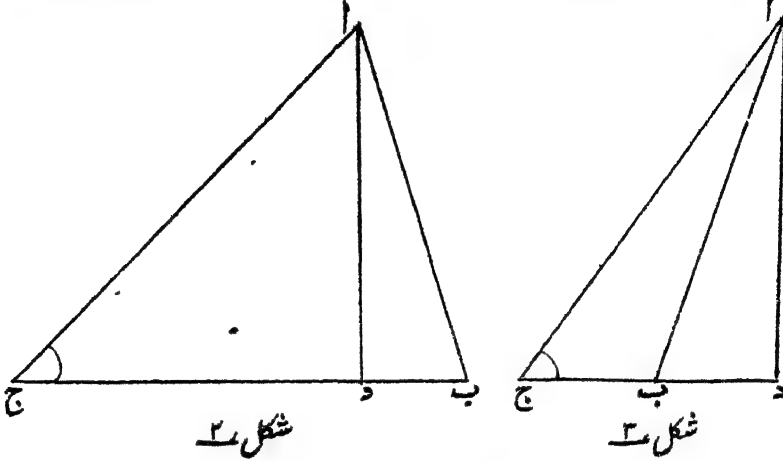
[کیونکہ مثلث ABC میں $\angle C > \angle B$ قائمہ ہے]

صورت دوم۔ فرض کرو کہ مثلث ABC میں $\angle C > \angle B$ حادہ ہے۔

۱ سے B ج پر عمود AD نکالو

تب B ج د ظل ہے ج A کا خط B ج پر

یہ ثابت کرنا ہے کہ $اب^2 = بج^2 + ج^2 - ۲ بج \times دج$ -



قائم الزاویہ مثلث $اب$ دیں

$$اب^2 = اد^2 + دب^2 = اد^2 + (بج - دج)^2$$

$$= اد^2 + بج^2 - ۲ بج \times دج + دج^2$$

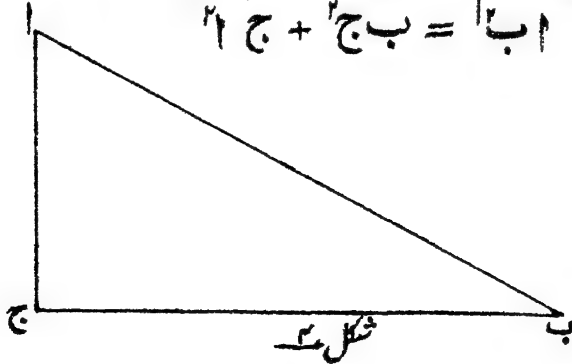
$$= بج^2 + اد^2 + دج^2 - ۲ بج \times دج$$

$$= بج^2 + ج^2 - ۲ بج \times دج$$

[کیونکہ مثلث $اج$ دیں $>$ قائمہ ہے]

صورت سوم۔ اگر مثلث $ابج$ میں $>$ $ج$ قائمہ ہو تو

$$اب^2 = بج^2 + ج^2$$



یہ فیثاغورث کا مسئلہ ہے اور طالب علم اس کے ثبوت سے پہلے ہی سے

واقف ہے۔ ان تینوں صورتوں کو طانے سے مسئلہ دفعہ ہذا ثابت ہوا۔

۳۸۔ دفعہ گذشتہ کی صورت اول میں

$$ج د = ج ا \times جم ا ج د = ج ا \times جم (۱۸۰ - ا ج ب)$$

$$= ج ا \times جم ج$$

اس لیے صورت اول کا ضابطہ اب^۱ = ب ج^۱ + ج ا^۱ + ۲ ب ج × ج د

ہو جاتا ہے اب^۱ = ب ج^۱ + ج ا^۱ - ۲ ب ج × ج ا × جم ج (۱)

دفعہ گذشتہ کی صورت دوم میں

$$ج د = ج ا \times جم ا ج د$$

$$= ج ا \times جم ج$$

اس لیے صورت دوم کا ضابطہ اب^۱ = ب ج^۱ + ج ا^۱ - ۲ ب ج × ج د

ہو جاتا ہے اب^۱ = ب ج^۱ + ج ا^۱ - ۲ ب ج × ج ا × جم ج (۲)

دفعہ گذشتہ کی صورت سوم میں ج قائمہ ہے اس لیے جم ج = ۰

اس لیے صورت سوم کا ضابطہ اب^۱ = ب ج^۱ + ج ا^۱ ہو جاتا ہے

$$اب^۱ = ب ج^۱ + ج ا^۱ - ۲ ب ج \times ج ا \times جم ج (۳)$$

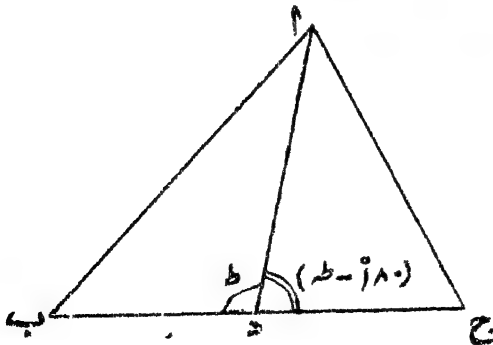
ضابطوں (۱)، (۲)، (۳) کو علم ثلث کی ترقیم کے مطابق

شکل ج^۱ = ا^۱ + ب^۱ - ۲ ا ب جم ج میں لکھا جاسکتا ہے اور یہ ضابطہ

درست ہے خواہ ج حادہ ہو یا قائمہ یا منفرجہ

۳۹۔ مسئلہ۔ اگر ثلث ا ب ج میں ا د ایک وسطانیہ ہو تو

$$اب + ا ج = ا ب^۲ + ا ج^۲$$



مثلث ا ب د میں فرض کرو کہ $\angle ا د ب = ط$

اس لیے $\angle ا د ج = ۱۸۰ - ط$

تب $ا ب^۲ = ا د^۲ + ب د^۲ - ۲ ا د \times ب د \times \cos ط$... (۱)

نیز $ا ج^۲ = ا د^۲ + د ج^۲ - ۲ ا د \times د ج \times \cos (۱۸۰ - ط)$

$= ا د^۲ + د ج^۲ + ۲ ا د \times د ج \times \cos ط$

$= ا د^۲ + ب د^۲ + ۲ ا د \times ب د \times \cos ط$... (۲)

(۱) اور (۲) سے

$ا ب^۲ + ا ج^۲ = ۲ ا د^۲ + ۲ ب د^۲$ جو ثابت کرنا تھا۔

امثلہ

(۱) مثلث ا ب ج میں $\angle ج = ۹۰^\circ$ جو ثابت کرو کہ $ا ج^۲ = ا ب^۲ + ب ج^۲$ ۔

اور اگر $\angle ج = ۱۲۰^\circ$ جو ثابت کرو کہ $ا ج^۲ = ا ب^۲ + ب ج^۲ + ا ب \times ب ج$

(۲) مثلث ا ب ج میں ضلع ب ج پر کوئی نقطہ لا ہے۔ اگر رأس ا نقطہ لا

پر منطبق ہو جائے تو دفعہ ۳ کی مدد سے معلوم کرو کہ $ا ج^۲ = ا ب^۲ + ب ج^۲ + ا ب \times ب ج$ ۔

(۳) مثلث ا ب ج میں $\angle ج = ۱۲۰^\circ$ ، $ا ب = ۴$ اور $ب ج = ۵$

(جواب $\angle ا = ۹۰^\circ$)

$\angle ا$ معلوم کرو

(۴) ایک مثلث کے اضلاع ۴، ۸، ۹ سم ہیں اس کے خطوط وسطی کے طول معلوم کرو۔

[جواب $\frac{۱۳}{۲}$ ، $\frac{۱۴}{۲}$ ، $\frac{۱۵}{۲}$ سم]

(۵) ایک مثلث کے خطوط وسطی کے طول ل، م، ن ہیں۔ اضلاع کے طول محسوب کرو۔

[جواب $\frac{۲}{۳} ل + \frac{۲}{۳} م + \frac{۲}{۳} ن$ ، $\frac{۲}{۳} ل + \frac{۲}{۳} م$ ، $\frac{۲}{۳} ل + \frac{۲}{۳} ن$ ، ...]

(۶) ایک متوازی الاضلاع کے ضلعوں پر کے مربعوں کا مجموعہ اس کے وتروں

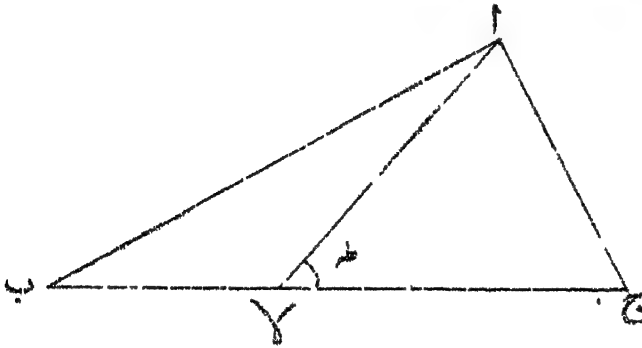
پر کے مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔

(۷) کسی ذواربقہ الاصلع میں وتروں پر کے مربعوں کا مجموعہ متقابل کے اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے والے خطوط پر کے مربعوں کے مجموعہ کا وہ بند ہوتا ہے۔

(۸) مثلث ا ب ج کے خطوط وسطی کا نقطہ تراکز و ہے، ثابت کرو کہ

$$ا ب^۲ + ب ج^۲ + ج ا^۲ = ۳ (و ب^۲ + و ج^۲ + و ا^۲)$$

(۹) مثلث ا ب ج میں ب ج پر نقطہ لا ایسا ہے کہ م \times ب لا = ن \times لا ج
 ثابت کرو کہ م \times ا ب^۲ + ن \times ا ج^۲ = م \times ب لا^۲ + ن \times لا ج^۲ + (م + ن) \times لا ا^۲
 (۱۰) پولونی شس کا مسئلہ



[آٹھارہ - فرض کرو کہ $ا ج > ا لا > ج لا = ط$

ا ب^۲ = ا لا^۲ + ب لا^۲ + ۲ ا لا . ب لا . ج م ط ... (۱)

ا ج^۲ = ا لا^۲ + ج لا^۲ - ۲ ا لا . ج لا . ج م ط ... (۲)

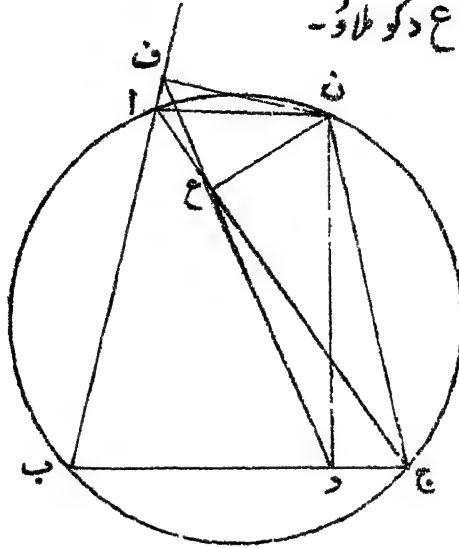
(۱) کو م سے اور (۲) کو ن سے ضرب دے کر جمع کرنے سے ملے گی۔

نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔ یہ نتیجہ مسئلہ دفعہ ۲۹ کی عام شکل ہے۔

۴۴۔ مسئلہ۔ (سمسن کا خط) ایک مثلث کے حائلہ دائرہ پر کے کسی نقطہ سے مثلث کے اضلاع پر عمود نکلے جائیں تو عمودوں کے پایئین ایک خط مستقیم میں واقع ہوتے ہیں۔

فرض کرو کہ مثلث ا ب ج کے حائلہ دائرہ پر کوئی نقطہ ن ہے
 اور ن سے مثلث کے اضلاع ب ج، ج ا، ا ب پر عمود بالترتیب
 ن د، ن ع، ن ف کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرنا ہے کہ نقاط د، ع، ف

ہم خط ہیں۔
ف ع، ع د کو طاؤ۔



چونکہ $\angle FEN = \angle CED = \angle AED = \angle AEC$ قائمہ
اس لیے نقاط ن، ف، ا، ع مشترک محیط ہیں۔
اس لیے $\angle FEN = \angle CED = \angle AED = \angle AEC$ قائمہ
(کیونکہ نقاط ن، ا، ب، ج مشترک محیط ہیں)۔
 نیز $\angle FEN = \angle CED = \angle AED = \angle AEC$ قائمہ
اس لیے نقاط ن، ع، د، ج مشترک محیط ہیں۔
اس لیے $\angle FEN = \angle CED = \angle AED = \angle AEC$ قائمہ
یعنی $\angle FEN = \angle CED = \angle AED = \angle AEC$ قائمہ
یعنی د، ع، د خط مستقیم ہے۔ یہی ثابت کرنا تھا۔
نوٹ۔ خط د، ع، ف کو مثلث ا ب ج کے لحاظ سے حالت دائرہ پر
نقطہ ن کا خط پائین یا سسین خط کہتے ہیں۔
مثلاً
(۱) (۲) ایک نقطہ فی سثلث ا ب ج کے اضلاع پر عمود لگائے گئے ہیں۔

اگر عمودوں کے پائین خطِ مستقیم میں ہوں تو ثابت کرو کہ ق، مثلث ا ب ج کے حائط دائرہ پر ہے۔
(ب) اگر نقطہ ق اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ق سے مثلث ا ب ج کے اضلاع پر نکالے ہوئے عمودوں کے پائین خطِ مستقیم میں واقع ہوتے ہیں تو ق کا طریق معلوم کرو۔
(۲) مثلث ا ب ج کے حائط دائرہ پر کسی نقطہ ن سے ب ج پر عمود ن د نکالا گیا ہے اسی حائط دائرہ سے مکرر ن پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ن کا خطِ پائین ا ن کے متوازی ہے۔

(۳) کسی مثلث کے حائط دائرہ پر کسی دو نقطوں ن اور ق کے سمسن خطوں کا درمیانی زاویہ اُس زاویہ کے مساوی ہوتا ہے جو ن ق کے محاذی دائرہ پر بننا۔
(۴) اگر چار خطوطِ مستقیم کے نقاطِ تقاطع سے جن میں سے کوئی دو باہم متوازی نہ ہوں چار مثلث بنائے جائیں تو ثابت کرو کہ ان مثلثوں کے چاروں حائط دائرہ ایک مشترک نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔

(۵) کسی نقطہ کا سمسن خط نقطہ مذکور کو مثلث کے عمودی مرکز سے ملانے والے خط کی تنصیف کرتا ہے۔

۴۱۔ مسئلہ۔ (نو نقطی دائرہ)۔ کسی مثلث میں اضلاع کے وسطی نقطہ راسوں سے مقابل کے اضلاع پر کے عمودوں کے پائین اور مثلث کے عمودی مرکز کو راسوں سے ملانے والے خطوں کے وسطی نقطے مشترک المحيط ہوتے ہیں۔
فرض کرو کہ مثلث ا ب ج کے اضلاع ب ج، ج ا، ا ب کے وسطی نقطے بالترتیب د، ع، ف ہیں۔

اور راسوں ا، ب، ج سے مقابل کے اضلاع پر کے عمودوں کے پائین بالترتیب لا، ما، بے ہیں۔

نیز فرض کرو کہ ان عمودوں کا نقطہ تراکز یعنی مثلث کا عمودی مرکز ہے اور ا، ب، ج د کے وسطی نقطے بالترتیب ع، بے، جے ہیں۔

پہلے ہم ثابت کریں گے کہ ع، بے، جے مشترک المحيط ہیں د، ع، ف کے ساتھ۔

چونکہ د اور ف بالترتیب وسطی نقطے ہیں ب ج اور ا ب کے

یعنی نقطہ لا نقاط 'ف' د میں سے گزرنے والے دائرہ پر واقع ہے
لیکن نقاط 'ف' د میں سے گزرنے والا دائرہ نقاط 'د' 'ع' 'ف' میں سے
گزرنے والا دائرہ ہے۔

پس معلوم ہوا کہ نقطہ لا نقاط 'د' 'ع' 'ف' کے ساتھ مشترک محیط ہے۔
اسی طرح سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ نقاط 'د' 'ع' 'ف' کے ساتھ
مشترک محیط ہیں۔ پس ثابت ہوا کہ 'لا' 'ما' 'مے' مشترک محیط ہیں 'د' 'ع' 'ف' کے ساتھ۔
پس ثابت ہوا کہ کسی مثلث کے اضلاع کے وسطی نقطے، رأسوں سے
مقابل کے اضلاع پر کے عمودوں کے پائین اور رأسوں کو مثلث کے عمودی مرکز سے
لانے والے خطوط کے وسطی نقطے مشترک، محیط جوتے ہیں۔

تقریبات: کسی مثلث کے مندرجہ بالا نو نقطوں میں سے گزرنے والے
دائرہ کو مثلث کا نو نقطی دائرہ کہتے ہیں اور اس دائرہ کے مرکز کو نو نقطی مرکز کہتے ہیں۔
۴۲۔ مسئلہ۔ کسی مثلث میں (۱) نو نقطی مرکز، حائل مرکز اور
عمودی مرکز کو لانے والے خط کا وسطی نقطہ ہوتا ہے۔
اور (۲) نو نقطی دائرہ کا قطر مثلث کے حائل دائرہ کے نصف قطر کے مساوی
ہوتا ہے۔

نیز (۳) ہندسی مرکز ہم خط ہوتا ہے حائل مرکز، نو نقطی مرکز اور عمودی مرکز کے ساتھ۔
ضمن کردہ مثلث اب ج کا حائل مرکز 'س' ہے، عمودی مرکز 'و' ہے
اور نو نقطی مرکز 'ن' ہے۔

ثابت کرنا ہے کہ (۱) نقطہ ن خط 'س' و کا نقطہ تنصیف ہے
اور (۲) نو نقطی دائرہ کا قطر حائل دائرہ کے نصف قطر 'س' کے مساوی ہے
اور نیز (۳) مرکز ثقل خط 'س' و پر ہے۔

(۱) دفعہ گذشتہ کی ترقیم کے مطابق چونکہ نو نقطی دائرہ نقاط 'د' اور 'لا'
میں سے گزرتا ہے۔

اس لیے نو نقطی مرکز 'د' 'لا' کے عمودی منصف پر ہوگا۔
اسی طرح سے نو نقطی مرکز 'ما' 'ع' کے عمودی منصف پر بھی ہوگا۔

فرض کرو کہ وسطانیہ ا د خط س و سے ٹ پر ملتا ہے
اب متشابہ مثلثات ا ٹ و اور د ٹ س میں

$$\frac{اٹ}{دٹ} = \frac{ا د}{د س} = \frac{۲}{۱}$$

اس لیے وسطانیہ ا د کی داخلی تقسیم نسبت ۱:۲ میں ٹ پر ہوتی ہے۔
اس لیے ٹ مثلث ا ب ج کا ہندسی مرکز (مرکز ثقل) ہے۔
پس مسئلہ ثابت ہوا۔

نوٹ۔ مسئلہ بالا (۳) میں متشابہ مثلثات ا ٹ و اور د ٹ س سے
حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{وٹ}{دٹ س} = \frac{ا د}{د س} = \frac{۲}{۱}$$

یعنی مثلث کا مرکز ثقل د ٹ ا عمودی مرکز و اور حائط مرکز س کو طانے والے
خط کی داخلی تقسیم نسبت ۱:۲ میں کرتا ہے۔

امثلہ ۱

(۱) دفعہ ۴۱ کے مسئلہ کو استعمال کرنے کے بغیر اسی دفعہ کی ترقیم کے مطابق
ثابت کرو کہ

(ا) لا مشترک محیط ہے ع، ب، ج کے ساتھ

(ب) د مشترک محیط ہے ع، ب، ج کے ساتھ

(ج) ع مشترک محیط ہے لا، ما، مے کے ساتھ

(د) د مشترک محیط ہے لا، حا، مے کے ساتھ

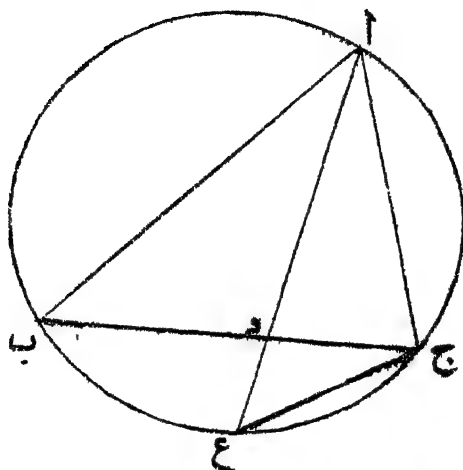
(۲) دفعہ ۴۱ کی شکل میں ثابت کرو کہ ع ف د جہ مستطیل ہے۔

(۳) دفعہ ۴۱ کی شکل میں ثابت کرو کہ ع د = ب ع = ج ف

(۴) ثابت کرو کہ ترقیم سابقہ کے مطابق ا د اور ع س ایک دوسرے کی
تقسیم کرتے ہیں۔

- (۵) معمولی ترقیم کے مطابق ثابت کرو کہ $\angle A = 2 \angle B$ (۱)
- (۶) ایک مثلث کا قاعدہ اور اُسی زاویہ دونوں معلوم ہیں۔ مثلث کے نوعی مرکز کا طریق معلوم کرو۔
- (۷) مثلث ABC کے جانبی دائروں کے مرکز M ، N ، P ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث ABC کا حائط دائرہ مثلث MNP کا نوعی دائرہ ہے اور اس سے جا مل کر کہ مثلث ABC کا حائط دائرہ مثلث MNP کے اضلاع کی تنصیف کرتا ہے۔
- (۸) مثلث ABC کا عمودی مرکز وہ ہے ثابت کرو کہ مثلث ABC کا نوعی دائرہ مثلثات AOB ، BOC اور COA کا بھی نوعی دائرہ ہے۔
- (۹) مثلث کا ایک رأس اور نوعی دائرہ معلوم ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث کے عمودی مرکز کا طریق ایک دائرہ ہے۔
- (۱۰) ایک مثلث کا ایک رأس عمودی مرکز اور نوعی دائرہ کا مرکز معلوم ہیں، مثلث بناؤ۔
- (۱۱) ایک مثلث کے دو رأسی اور نوعی دائرہ کا مرکز معلوم ہیں مثلث بناؤ۔
- (۱۲) ایک مثلث کا قاعدہ اور اُسی زاویہ معلوم ہیں۔ ثابت کرو کہ اُس کے مثلث پائین کا ایک ضلع اور ایک زاویہ مستقل ہیں۔
- مسئلہ - مثلث ABC کے زاویہ A کا اندرونی منصف قاعدہ BC سے دیر لے تو
- $AB \times AC = AD^2 + BD \times DC$
- مثلث ABC کا حائط دائرہ کھینچو اور فرض کرو کہ AD محدودہ حائط دائرہ سے E پر ملتا ہے۔ BC کو MD ۔
- مثلثات ABD اور ACD میں
- $\angle ABD = \angle ACD$
- $\angle BAD = \angle CAD$
- \therefore مثلثات ABD اور ACD ج متشابه ہیں۔

$$\frac{ab}{ac} = \frac{ad}{dc}$$



$$\therefore ab \times dc = ac \times ad$$

$$ad (ad + dc) =$$

$$ad^2 + ad \times dc$$

$$= ad^2 + bd \times dc$$

[کیونکہ وتر AC اور BC ایک دوسرے کو د پر قطع کرتے ہیں]۔

پس مسئلہ ثابت ہوا

مشتق۔ اگر $a > b$ کا بیرونی منصف B ج محدودہ سے د پر پڑے

$$تو ثابت کرو کہ $ab \times ac = bd \times dc - ad^2$$$

نوٹ:- اگر دفعہ بالا کی شکل میں $ab = ac$ تو $ac^2 = ad \times ac$ ۔

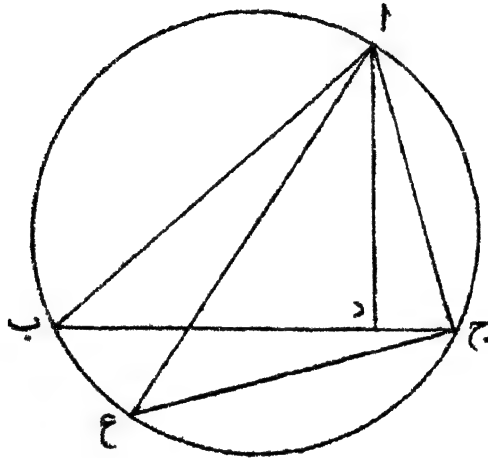
اس نتیجہ کا عکس درست نہیں ہے کیونکہ اگر مثلث متساوی الساقین ABC کے عماس A میں سے کوئی خط کھینچا جائے جو قاعدہ یعنی محدودہ خط BC سے

د پر اعداد حائل دائرہ سے E پر ملے تو

$$ac^2 = ad \times ac$$

۴۴۔ اگر مثلث ABC کے رأس A سے B ج پر عمود AD ہو

اور اے مثلث ا ب ج کے حائط دائرہ کا قطر ہو تو ا ب \times ا ج = ا د \times ا ع
ج ع کو ملاؤ
مثلثات ا ب د اور ا ع ج میں



\angle ا ب د = \angle ا ع ج (کیونکہ یہ ایک ہی قوس کے اندر کے زاویے ہیں)
اور \angle ا د ب = \angle ا ج ع (کیونکہ ہر ایک قائمہ ہے)
اس لیے مثلثات ا ب د اور ا ع ج متشابہ ہیں

$$\text{اس لیے } \frac{ا د}{ا ج} = \frac{ا ب}{ا ع}$$

اس لیے ا ب \times ا ج = ا د \times ا ع - جو ثابت کرنا تھا۔
نوٹ: - اگر عمود ا د کو ع سے تعبیر کیا جائے تو معمولی ترقیم کے مطابق
اس مسئلہ کو یوں بھی لکھ سکتے ہیں:-

$$ب \times ج = ۲ \times ا د \quad \text{جہاں } ۲ \text{ حائط دائرہ کا نصف قطر ہے۔}$$

$$\frac{۲ \times ا د}{۲} = \triangle \quad \text{نیز چونکہ مثلث ا ب ج کا رقبہ}$$

$$\text{اس لیے } \frac{\triangle ۲}{۱} = ا ع$$

ح کی اس قیمت کو اوپر کے نتیجہ میں درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ب ج} = \frac{\Delta^2}{4} \times ۱۲$$

$$\frac{\text{ب ج}}{\Delta^2} = \text{یعنی حاکٹ دائرہ کا نصف قطر م}$$

(مقابلہ کرو دفعہ ۲۴ نتیجہ ۳ سے)

امثال

(۱) مثلث ا ب ج کے Δ کا داخلی ناصف قاعدہ ب ج سے د پر ملتا ہے - ا د کا طول محسوب کرو۔

$$\text{معمولی ترتیم کے مطابق ب د} = \frac{\text{ج ا}}{\text{ب ج}} \text{ اور د ج} = \frac{\text{ب ا}}{\text{ب ج}}$$

$$\text{ازروئے دفعہ ۲۳ ب ج} = \text{ا د} + \text{ب د} \times \text{د ج}$$

$$= \text{ا د} + \frac{\text{ب ج}}{(\text{ب ج})^2}$$

$$\text{اس لیے ا د} = \text{ب ج} \left[۱ - \frac{\text{ا}}{(\text{ب ج})^2} \right] = \frac{(\text{ب ج} + \text{ا})(\text{ب ج} - \text{ا})}{(\text{ب ج})^2}$$

اگر مثلث کے محیط یعنی $\text{ا} + \text{ب} + \text{ج}$ کو ۲ سے تعبیر کیا جائے

$$\text{تو ا د} = \frac{\text{ب ج} \times ۲ \text{ س } (۲ \text{ س} - \text{ا})}{(\text{ب ج})^2}$$

$$\therefore \text{ا د} = \frac{۲ \text{ س } (\text{ب ج} + \text{ا} \text{ س} - \text{ا})}{(\text{ب ج})^2}$$

$$= \frac{۲ \text{ س } (\text{ب ج} + \text{ا} \text{ س} - \text{ا})}{(\text{ب ج})^2} = \frac{۱}{۲} \text{ س } (\text{ب ج} + \text{ا} \text{ س} - \text{ا})$$

(۲) اگر مثلث ا ب ج کے زاویہ ا کا خارجی نصف ب ج سے د پر ملے تو

$$\text{ثابت کرو کہ } \frac{2 \text{ ب ج}}{\text{ج سے ب}} \times \text{جب } \frac{1}{2} = \text{د}$$

(۳) مثلث بناؤ جس کا قاعدہ راسی زاویہ اور باقی دو اضلاع کا حاصل ضرب معلوم ہیں۔

(۴) مثلث ا ب ج کے اندرونی دائرہ کا مرکز م ہے ہے اور ا کے متقابل کے جانبی دائرہ کا مرکز م ہے۔ م سے م ضلع ب ج سے د پر اور حاطہ دائرہ سے ف پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ

ا د × ا ف = ا م × ا م
(۵) ا ب ج میں ا ب ا ج اور ضلع ب ج پر نقطہ د اس طرح لیا گیا ہے کہ
ا ب × ا ج = ا د + ب د × د ج
ثابت کرو کہ ا د زاویہ ب ا ج کا اندرونی ناصف ہے۔
فرض کرو کہ ا د مثلث ا ب ج کے حاطہ دائرہ سے ع پر ملتا ہے۔
(دیجھو شکل دفعہ ۴۳)

$$\text{تب } ا د + ب د \times د ج = ا د + ا د \times د ج = ا د \times ا ع$$

$$\text{اس لیے } ا ب \times ا ج = ا د \times ا ع$$

$$\text{یعنی } \frac{ا ب}{ا د} = \frac{ا ج}{ا ع}$$

$$\text{اور } \angle ا ب د = \angle ا ج ع$$

اس لیے امثلہ سوال ۱ کی رُو سے

$$\text{یا تو } \angle ا د ب = \angle ا ج ع \dots\dots\dots (۱)$$

$$\text{یا } \angle ا د ب + \angle ا ج ع = ۲ قائمے \dots\dots (۲)$$

اب ہم ثابت کریں گے کہ نتیجہ (۲) نامکن ہے

$$\text{اگر } \angle ا د ب + \angle ا ج ع = ۲ قائمے$$

$$\text{تو } \angle ا ج ع = \angle ا د ج \text{ یعنی } \angle ا ج د = \angle ا ج ع = \angle ا ج ب$$

یعنی $اب = اج$ جو شرائط سوال کے خلاف ہے۔

اس لیے $ادب = اج$ ع

اس لیے $ب ا د = اج$ یعنی $اد$ زاویہ $ب$ $اج$ کا اندرونی منصف ہے۔

(۶) مثلث $ابج$ میں $اب = اج$ ، قاعدہ $بج$ یا $بج$ محدودہ پر کوئی نقطہ دے کر ثابت کرو کہ مثلثات $اب$ $د$ اور $اج$ $د$ کے حائط دائروں کے نصف قطر مساوی۔ (۷) سوال ۶ میں اگر $اب$ اور $اج$ مساوی نہ ہوں تو ثابت کرو کہ مثلثات

$اب$ $د$ اور $اج$ $د$ کے نصف قطروں کی نسبت $اب : اج$ کے مساوی ہے۔

(۸) ایک ذواربقتہ الاضلاع $ابج$ $د$ دائرہ کے اندر بنا ہوا ہے۔ دائرہ

پر ایک نقطہ $ن$ ایسا معلوم کرو کہ $ن ا \times ن ج = ن ب \times ن د$

(اشارہ - $ن$ سے $اج$ پر کا عمود $= ن$ سے $ب$ $د$ پر کا عمود)

(۹) ایک مثلث کا قاعدہ اور راسی زاویہ دیے گئے ہیں۔ وہ مثلث بناؤ

جس کے اضلاع کا حاصل ضرب بڑے سے بڑا ہے۔

(۱۰) ایک دیے ہوئے دائرہ کے اندر ایک دیے ہوئے رقبہ والا مثلث بنایا

گیا ہے ثابت کرو کہ تینوں ضلعوں کا حاصل ضرب مستقل ہے۔

(۱۱) ایک دائرہ کے وتر $اب$ کا عمودی منصف قوس سے $ج$ پر ملتا ہے اور

قوس $اج$ $ب$ پر کوئی نقطہ دے کر ثابت کرو کہ $اج^2 = اد \times دب + دج^2$

اس کی مدد سے حاصل کرو کہ $اد \times دب$ بڑے سے بڑا ہوگا اگر نقطہ $د$ نقطہ $ج$ پر منطبق ہو۔

(۱۲) $ابج$ $د$ ایک مشترک المحيط ذواربقتہ الاضلاع ہے۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{اج}{ب د} = \frac{اب \times اد + ج ب \times ج د}{ب ا \times ب ج + د ا \times د ج}$$

(۱۳) $ابج$ $د$ ایک مشترک المحيط ذواربقتہ الاضلاع ہے

اس کے حائط دائرہ پر کے کسی نقطہ $ن$ سے $اب$ ، $بج$ ، $ج د$ ، $د ا$ پر

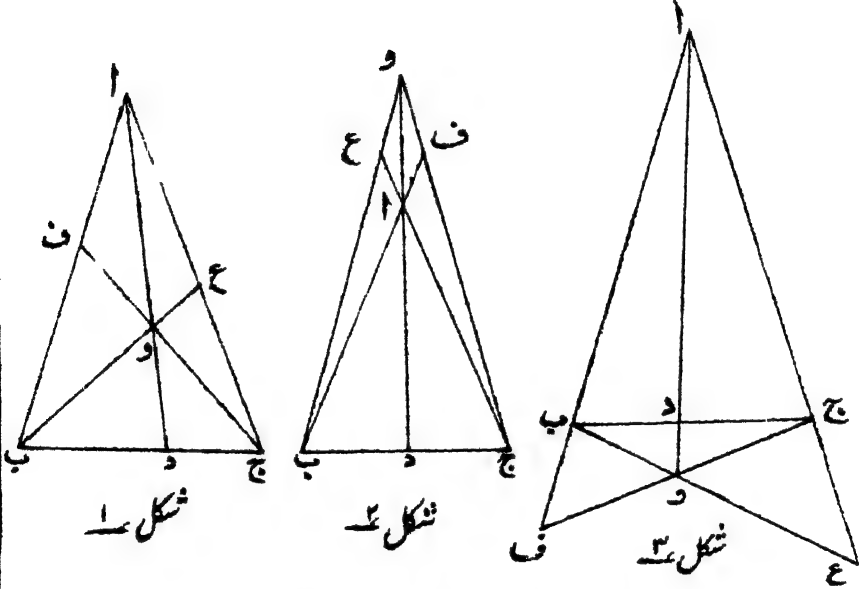
عمود نکالے گئے ہیں جن کے طول بالترتیب $ع$ ، $ع$ ، $ع$ ، $ع$ ہیں اور اسی نقطہ $ن$

سے وتر $اج$ ، $ب د$ پر کے عمودوں کے طول بالترتیب $ع$ ، $ع$ ہیں

ثابت کرو کہ $ع ع = ع ع = ع ع$

۴۵۔ مسئلہ۔ اگر مثلث ا ب ج کے رؤسوں ا، ب، ج میں سے گزرنے والے متوازی خط مقابل کے امتداد سے بالترتیب نقاط د، ع، ف پر ملیں تو

$$1 + \frac{اف}{فب} \times \frac{ج ع}{ع ا} \times \frac{ب د}{د ج}$$



فرض کرو کہ ا، د، ب، ع، ج، ف کا نقطہ ترازو و ہے۔
اگر نقطہ و مثلث کے اندر ہو [دیکھو شکل (۱)] تو تینوں نسبتیں

$$\frac{ب د}{د ج}، \frac{ج ع}{ع ا}، \frac{اف}{فب} \text{ ثابت ہیں۔}$$

اگر نقطہ و مثلث کے باہر ہو [دیکھو اشکال (۲) اور (۳)] تو مندرجہ بالا نسبتوں میں سے صرف ایک مثبت ہوگی اور باقی دو منفی۔
پس ہر صورت میں مندرجہ بالا تینوں نسبتوں کا حاصل ضرب مثبت ہوگا۔

$$\frac{ب د}{د ج} = \frac{ا ب د}{ا د ج} = \frac{ا ب د}{ا د ج} = \frac{ا ب د}{ا د ج} \text{ (یوجب دفعہ ۱۳ ب)}$$

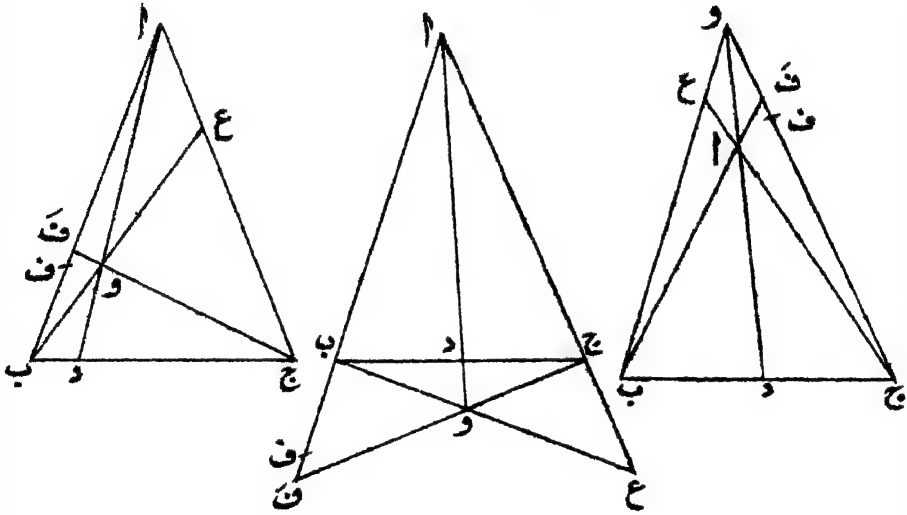
$$\frac{ج ع}{ع ا} = \frac{ا ب د}{ا د ج} \text{ اور } \frac{اف}{فب} = \frac{ا ب د}{ا د ج}$$

$$\text{اس لیے } \frac{\Delta \text{ ا د ب}}{\Delta \text{ ا د ج}} \times \frac{\Delta \text{ ب و ج}}{\Delta \text{ ب و ا}} \times \frac{\Delta \text{ ج و ا}}{\Delta \text{ ج و ب}} = \frac{\text{ا ف}}{\text{ف ب}} \times \frac{\text{ج ع}}{\text{ع ا}} \times \frac{\text{ب د}}{\text{د ج}}$$

اس مسئلہ کا عکس :- اگر مثالث ا ب ج کے اضلاع ب ج، ج ا، ا ب پر بالترتیب نقاط د، ع، ف اس طرح واقع ہوں کہ

$$\frac{\text{ب د}}{\text{د ج}} \times \frac{\text{ج ع}}{\text{ع ا}} \times \frac{\text{ا ف}}{\text{ف ب}} = 1 +$$

تو خطوط ا د، ب ع، ج ف متراکز ہوں گے۔



فرض کرو کہ ا د اور ب ع کا نقطہ تقاطع و ہے نیز فرض کرو کہ ج و ضلع ا ب سے ف پر ملتا ہے۔

چونکہ ا د، ب ع، ج ف متراکز خط ہیں

$$\text{اس لیے } \frac{\text{ب د}}{\text{د ج}} \times \frac{\text{ج ع}}{\text{ع ا}} \times \frac{\text{ا ف}}{\text{ف ب}} = 1 +$$

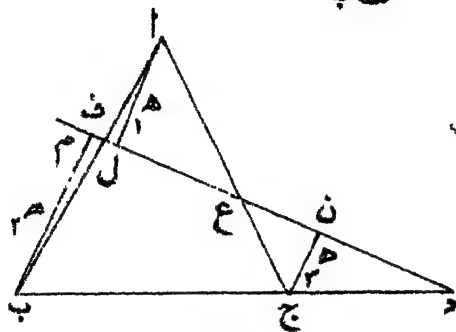
لیکن بموجب مفروض $\frac{\text{ب د}}{\text{د ج}} \times \frac{\text{ج ع}}{\text{ع ا}} \times \frac{\text{ا ف}}{\text{ف ب}} = 1 +$

اس لیے $\frac{اف}{فب} = \frac{اف}{فب}$ (بلحاظ مقدار اور علامت کے)

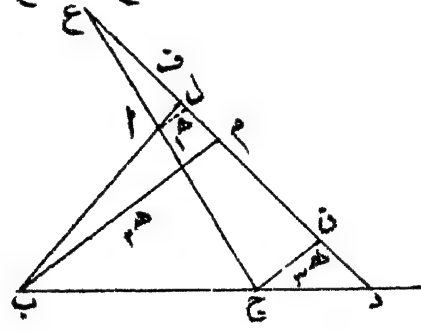
اس لیے نقطہ ف نقطہ ف پر منطبق ہے ۔
پس ثابت ہوا کہ خطوط ا د ، ب ع ، ج ف متراکز ہیں ۔
نوٹ ۔ اس مسئلہ کو سیوا (Ceva) کا مسئلہ کہتے ہیں ۔

۴۶۔ مسئلہ ۔ اگر ایک خط مستقیم مثلث ا ب ج کے اضلاع ب ج ، ج ا ، اب کو بالترتیب نقاط د ، ع ، ف پر قطع کرے تو

$$1 = \frac{اف}{فب} \times \frac{ج ع}{ع ا} \times \frac{ب د}{د ج}$$



شکل ۱۔



شکل ۲۔

قاطع مثلث کے دو ضلعوں کو داخلاً اور ایک ضلع کو خارجاً قطع کریگا [دیکھو شکل (۱)]
یا تینوں ضلعوں کو خارجاً قطع کریگا [دیکھو شکل (۲)]

اس لیے تین نسبتوں $\frac{ب د}{د ج}$ ، $\frac{ج ع}{ع ا}$ ، $\frac{اف}{فب}$ میں سے دو مثبت

اور ایک منفی ہوگی یا تینوں منفی ہوں گی ۔

اس لیے ہر صورت میں ان نسبتوں کا حاصل ضرب منفی ہوگا ۔ اب نقاط ا ب ج سے قاطع پر بالترتیب عمود ال ، ب م ، ج ن نکالو ۔ اور فرض کرو کہ ان کے طول بالترتیب ہ ، ہ ، ہ ہیں ۔

تشابہ مثلثات سے بلا لحاظ علامت کے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{ب د}{د ج} = \frac{ب ا}{ا ج} ، \frac{ب ا}{ا ج} = \frac{ب د}{د ج} \text{ اور } \frac{ا ف}{ف ب} = \frac{ا ج}{ج د}$$

اس لیے صرف عددی قیمت کو ملحوظ رکھنے سے

$$1 = \frac{ب د}{د ج} \times \frac{ا ج}{ج د} \times \frac{ا ف}{ف ب} = \frac{ب ا}{ا ج} \times \frac{ا ج}{ج د} \times \frac{ا ف}{ف ب}$$

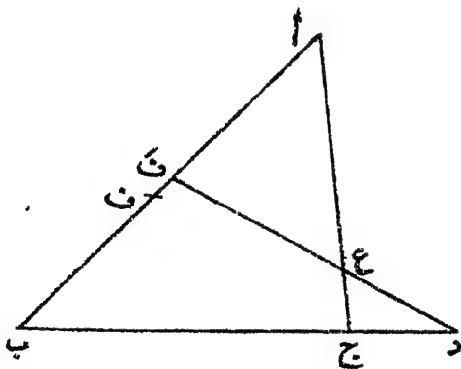
چونکہ یہ ثابت ہو چکا ہے کہ اس حاصل ضرب کی علامت منفی ہے

$$1 = - \frac{ب د}{د ج} \times \frac{ا ج}{ج د} \times \frac{ا ف}{ف ب}$$

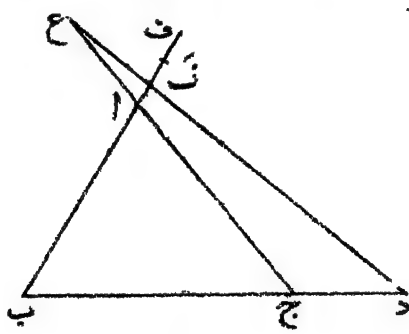
اس مسئلہ کا عکس :- اگر ایک مثلث ا ب ج کے اضلاع ب ج، ج ا، ا ب پر نقاط د، ع، ف اس طرح واقع ہوں کہ

$$1 = - \frac{ب د}{د ج} \times \frac{ا ج}{ج د} \times \frac{ا ف}{ف ب}$$

تو نقاط د، ع، ف ہم خط ہوں گے۔



شکل ۱۔



شکل ۲۔

فرض کرو کہ د ع ضلع ا ب سے ف پر ملتا ہے
چونکہ نقاط د، ع، ف ہم خط ہیں

$$1 = - \frac{ب د}{د ج} \times \frac{ا ج}{ج د} \times \frac{ا ف}{ف ب}$$

$$\text{لیکن بموجب مفروض } \frac{ب د}{د ج} \times \frac{ج ع}{ا ع} \times \frac{ا ف}{ف ب} = ۱$$

$$\text{اس لیے } \frac{ا ف}{ف ب} = \frac{ا ف}{ف ب} \quad (\text{بجائز مقدار اور علامت کے})$$

اس لیے نقطہ ف نقطہ ف پر منطبق ہے۔

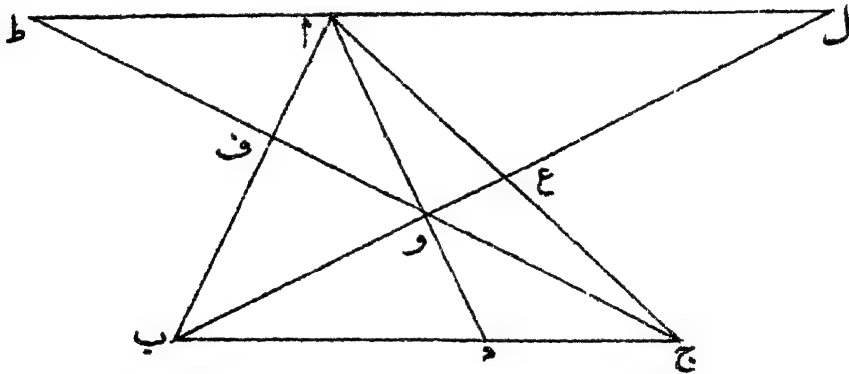
پس ثابت ہوا کہ نقاط د، ع، ف ہم خط ہیں۔

نوٹ :- اس مسئلہ کو مینیلاس (Menelaus) کا مسئلہ کہتے ہیں۔

مسئلہ ۱۲

(۱) سیوا کے مسئلہ کا قیادل ثبوت :-

مثلث ا ب ج کے رأسوں سے متکثر خطوط ا و ب و ج د کہینے گئے ہیں جو مقابل کے اضلاع سے بالترتیب نقاط د، ع، ف پر ملتے ہیں اور



ا میں سے گزرنے والے اور ب ج کے متوازی خط سے ب ع اور ج ف بالترتیب ل اور ط پر ملتے ہیں۔

$$\text{منشأہ مثلثوں کی مدد سے } \frac{ا ف}{ف ب} = \frac{ط ا}{ب ج}$$

$$\text{اور } \frac{ب د}{د ج} = \frac{ب د}{د ج} \times \frac{ا د}{د ا} = \frac{ا د}{د ج} \times \frac{ا د}{ا د} = \frac{ا د}{د ج}$$

$$\text{اور } \frac{\text{ج ع}}{\text{ا ع}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{ا ا}}$$

$$\text{اس لیے } \frac{\text{ا ف}}{\text{ف ب}} \times \frac{\text{ب د}}{\text{د ج}} \times \frac{\text{ج ع}}{\text{ا ع}} = \frac{\text{ط ا}}{\text{ب ج}} \times \frac{\text{ا ا}}{\text{ط ا}} \times \frac{\text{ب ج}}{\text{ا ا}} = 1$$

(۳) سیوا (Ceva) کے مسئلہ کی رو سے ثابت کرو کہ کسی مثلث میں

(ا) خطوط وسطی متراکز ہوتے ہیں۔

(ب) رأسوں سے مقابل کے اضلاع پر کے عمود متراکز ہوتے ہیں۔

(ج) اضلاع کے عمودی منصف متراکز ہوتے ہیں۔

(د) زاویوں کے اندرونی منصف متراکز ہوتے ہیں۔

(ع) دو زاویوں کے خارجی منصف اور تیسرے کا داخلی منصف متراکز ہوتے ہیں۔

(۳) مثلث ا ب ج کا اندرونی دائرہ مثلث کے اضلاع ب ج، ج ا، ا ب

کو بالترتیب د، ع، ف پر مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ د، ع، ف متراکز ہیں۔ اس مسئلہ کا شامل مسئلہ جانبی دائروں کی صورت میں بھی بیان کرو اور ثابت کرو۔

(۴) ایک مثلث ا ب ج کا اندرونی دائرہ اضلاع ب ج، ج ا، ا ب کو

بالترتیب نقاط د، ع، ف پر مس کرتا ہے۔ ع ف مدوہ ب ج سے ن، پ، د مدوہ ا ج سے ق، پ، اور د ع مدوہ ا ب سے س، پ ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ نقاط ن، ق، س ہم خط ہیں۔

(۵) سوال ۲ میں ثابت کرو کہ ب ج کی موسیقی تقسیم د اور ن پر ہوتی ہے۔

(۶) ایک مثلث کے دو زاویوں کے اندرونی منصف اور تیسرے کا خارجی منصف

مقابل کے اضلاع سے ہم خط نقطوں پر ملتے ہیں۔

(۷) ثابت کرو کہ مثلث کے زاویوں کے خارجی ناصف مقابل کے اضلاع سے

جن تین نقطوں پر ملتے ہیں وہ نقطے ہم خط ہیں۔

(۸) مثلث ا ب ج کے رأسوں ا، ب، ج پر محیط دائرہ کے ماس کھینچے

گے، ہیں اور وہ مقابل کے اضلاع سے بالترتیب ل، م، ن پر ملتے ہیں ثابت کرو کہ

نقاط ل، م، ن ہم خط ہیں۔ [اشارہ - $\frac{ب ل}{ج ل} = \frac{ب ا}{ج ا}$]

(۹) مثلث ا ب ج کے اندر ایک نقطہ وہ ہے۔ ثابت کرو کہ زاویوں ا و ب، ب و ج، ج و ا کے خارجی منصف بالترتیب اضلاع اب، ب ج، ج ا سے تین ہم خط نقطوں پر ملتے ہیں۔

(۱۰) تین متراکز خط ا د، ب ع، ج ف مثلث ا ب ج کے اضلاع ب ج، ج ا، ا ب سے بالترتیب د ع، ع ف، ف پر ملتے ہیں اور ع ف، ف د، د ع بالترتیب ب ج، ج ا، ا ب سے لا، ما، اے پر ملتے ہیں ثابت کرو کہ نقاط لا، ما، اے ہم خط ہیں نیز ثابت کرو کہ ب د ج لا ایک موسیقی صفت ہے۔

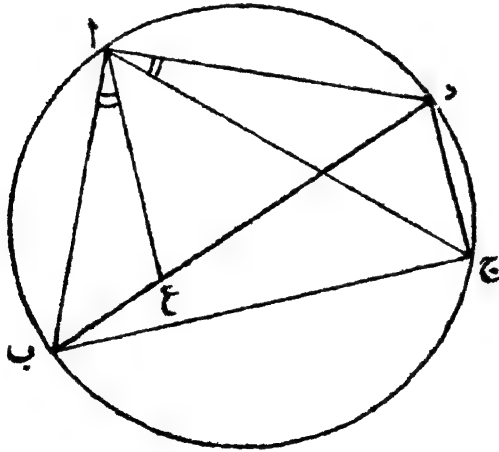
(۱۱) مثلث ا ب ج کے اندر کوئی نقطہ وہ ہے۔ ثابت کرو کہ

جب و ب ج × جب و ج ا × جب و ا ب = جب و ج ب × جب و ب ا × جب و ا ج
اس نتیجہ کا عکس بیان کرو اور اُس کو بھی ثابت کرو۔

چوتھا باب

دائرؤں کے خواص

۴۷۔ مسئلہ۔ ایک مشترک محیط ذو اربعۃ الاضلاع (چار ضلعی) کے وترؤں کا حاصل ضرب مقابل کے اضلاع کے حاصل ضربوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔



اب ج د ایک مشترک محیط ذو اربعۃ الاضلاع ہے، ثابت کرنا ہے کہ

$$اج \times ب د = د ب \times ج د + ا د \times ب ج$$

 ج ا د کے مساوی $\angle ب ا ع$ بناؤ۔

فرض کرو کہ ا، ب، د سے ع پر ملتا ہے
 مثلثات ب ا ع اور ج ا د میں
 $\angle ب ا ع = \angle ج ا د$
 اور $\angle ا ب ع = \angle ا ج د$
 اس لیے مثلثات ب ا ع اور ج ا د متشابه ہیں -

$$\text{اس لیے } \frac{ا ب}{ا ج} = \frac{ب ع}{ج د}$$

یعنی $ا ب \times ج د = ا ج \times ب ع$ (۱)
 نیز مثلثات ب ا ج اور ع ا د میں
 $\angle ب ا ج = \angle ع ا د$
 اور $\angle ا ب ج = \angle ا ع د$
 اس لیے مثلثات ب ا ج اور ع ا د متشابه ہیں -

$$\text{اس لیے } \frac{ب ج}{ع د} = \frac{ا ج}{ا د}$$

یعنی $ا د \times ب ج = ا ج \times ع د$ (۲)
 (۱) اور (۲) سے حاصل ہوتا ہے:

$$\begin{aligned} ا ب \times ج د + ا د \times ب ج &= ا ج \times ب ع + ا ج \times ع د \\ ا ج &= (ب ع + ع د) \\ ا ج \times د ب &= \end{aligned}$$

نوٹ - اس مسئلہ کو بطلمیوس (Ptolemy) کا مسئلہ کہتے ہیں -

امثلہ ۱۳

(۱) مثلث ا ب ج میں ا ب = ا ج، قاعدہ ب ج کے سروں
 ب اور ج سے خطوط با د اور ج د کھینچے گئے ہیں جو بالترتیب ب ا اور ج ا

پر عمود ہیں۔ ثابت کر دو کہ

$$ب ج \times ا د = ا ب \times ب د$$

(۲) مثلث مساوی الاضلاع ا ب ج کے حائل دائرہ کی قوس صغیر ب ج پر کوئی نقطہ ن ہے۔ ثابت کر دو کہ

$$ن ب + ن ج = ا ن$$

(۳) مثلث ا ب ج میں ا ب = ا ج، اس مثلث کے حائل دائرہ کی قوس ب ج پر کوئی نقطہ ن لیا گیا ہے۔ ثابت کر دو کہ (ن ب + ن ج) : ا ن ایک مستقل مقدار ہے۔ نیز بتاؤ کہ ن کے کس مقام کے جواب میں ن ب + ن ج کی قیمت بڑی سے بڑی ہے۔

(۴) مربع ا ب ج د کے حائل دائرہ کی قوس صغیر ا ب پر کوئی نقطہ ن لیا گیا ہے۔ ثابت کر دو کہ

$$(ن ا + ن ج) : (ن ب + ن د) = ن د : ن ج$$

(۵) منظم سدس ا ب ج د ع ف کے حائل دائرہ کی قوس صغیر ا ب پر کوئی نقطہ ن لیا گیا ہے۔ ثابت کر دو کہ

$$ن ا + ن ب + ن ج + ن د = ن ف$$

(۶) بطلمیوس کے مسئلہ کی مدد سے زاویوں ع اور ہ کی حادہ قیمتوں کے لیے ثابت کر دو کہ

$$جب (ع + ہ) = جب ع جم ہ + جم ع جب ہ$$

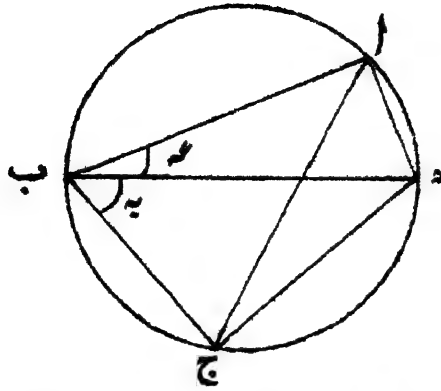
اگائی مول کے خط ب د کے قطر پر ایک دائرہ بناؤ۔ ب د کی مخالف سمتوں میں زاویے د ب ا اور د ب ج بالترتیب ع اور ہ کے مساوی بناؤ (دیکھو شکل صفحہ ۷۹)۔ ا ج کو ملاؤ۔

$$بطلمیوس کے مسئلہ کی رو سے ا ب \times ج د + ا د + ب ج = ا ج \times ب د$$

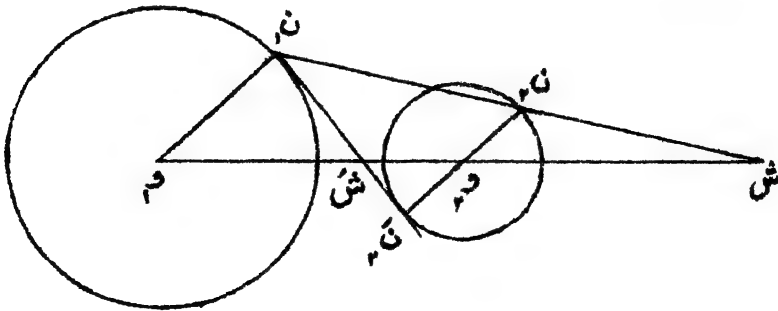
$$\text{یعنی جم ع جب ہ + جب ع جم ہ = ا ج (کیونکہ ب د = ا)}$$

لیکن مثلث ا ب ج میں $\frac{ا ج}{جب (ع + ہ)} =$ مثلث کے حائل دائرہ کا قطر ب د = ا

∴ ا ج = جب (عہ + بہ)



پس ثابت ہوا کہ جب عہ جم بہ + جم عہ جب بہ = جب (عہ + بہ)
 (۷) مندرجہ بالا سوال کے طریقہ سے مناسب شکلیں کھینچ کر ثابت کرو کہ
 (ا) جب (عہ - بہ) = جب عہ جم بہ - جم عہ جب بہ
 (ب) جم (عہ + بہ) = جم عہ جم بہ - جب عہ جب بہ
 (ج) جم (عہ - بہ) = جم عہ جم بہ + جب عہ جب بہ
 ۴۸۔ اگر دو دائروں میں کوئی دو متوازی نصف قطر (ہر دائرہ میں ایک) کھینچے جائیں تو ان کے سروں کو ملانے والا خط مستقیم مرکزوں کے خط کو دو ثابت نقطوں میں سے کسی ایک نہایت قطع کرتا ہے۔



رض کرو کہ (م) اور (د) دو دیے ہوئے دائرے ہیں۔

جن کے نصف قطر بالترتیب r اور R ہیں۔ ان میں دو نصف قطر (۱) OP اور OQ ایک ہی سمت میں متوازی اور (۲) OP اور OQ مخالف سمتوں میں متوازی کھینچے گئے ہیں۔
 خطوط PN اور QN مرکزوں کے خط OP کو بالترتیب نقاط P اور Q پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرنا ہے کہ PN اور QN دو ثابت نقطے ہیں۔

حصہ اول - چونکہ OP // OQ اس لیے مثلثات PNQ اور QNP متشابه ہیں۔

اس لیے $\frac{PN}{NQ} = \frac{ON}{NQ} = \frac{OP}{OQ}$ جو ایک مستقل مقدار ہے۔
 یعنی مرکزوں کے خط OP کی خارجی تقسیم P کی نسبت میں نقطہ N پر ہوتی ہے اس لیے N ایک ثابت نقطہ ہے۔

حصہ دوم - چونکہ OP // OQ اس لیے مثلثات PNQ اور QNP متشابه ہیں۔

اس لیے $\frac{PN}{NQ} = \frac{ON}{NQ} = \frac{OP}{OQ}$ جو ایک مستقل مقدار ہے۔
 یعنی مرکزوں کے خط OP کی داخلی تقسیم P کی نسبت میں نقطہ N پر ہوتی ہے۔ اس لیے N ایک ثابت نقطہ ہے۔

پس مسئلہ ثابت ہوا۔

تحریر - نقاط P اور Q جن پر مرکزوں کے خط OP کی داخلی اور خارجی تقسیم نصف قطروں r اور R کی نسبت میں ہوتی ہے، ویسے ہوئے دائروں کے مشابہت کے مرکز کہلاتے ہیں۔ PN سیدھی مشابہت کا مرکز ہے اور QN آرٹھی مشابہت کا مرکز۔

امثلہ ۱۱

(۱) دائروں (م) اور (ن) کے نصف قطر r اور R ہیں اور

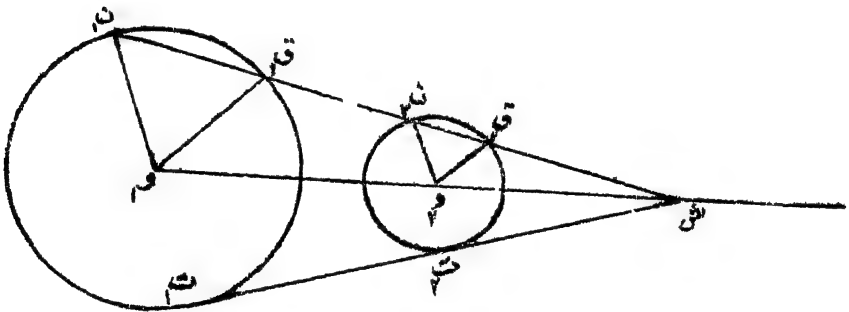
۱۴ = ۱۵ ان دائرؤں کے مشابہت کے مرکزوں کا درمیانی فاصلہ محسوب کرو۔

[جواب - ۳]

(۲) ثابت کرو کہ دائرؤں (۱) اور (۲) کے راست مشترک مماسات کا نقطہ تقاطع سیدھی مشابہت کے مرکز ش پر اور متقاطع مشترک مماسات کا نقطہ تقاطع اڑی مشابہت کے مرکز ش پر ہے۔

(۳) ایک متغیر دائرہ (ج) دو دیے ہوئے دائرؤں (۱) اور (۲) کو نقاط ف اور ق پر مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ خط مستقیم ف ق دیے ہوئے دائرؤں کے ایک نہ ایک مشابہت کے مرکز میں سے گزرتا ہے۔ مختلف صورتوں میں امتیاز کرو۔

(۴) دو دیے ہوئے دائرؤں (۱) اور (۲) کی سیدھی مشابہت کے مرکز ش میں ایک خط کھینچا گیا ہے جسے جو دائرہ (۱) کو نقاط ن اور ق پر اور دائرہ (۲) کو نقاط ت اور ق پر قطع کرتا ہے (دیکھو شکل)



ثابت کرو کہ $SN \times SQ = ST \times SC$ اور $SN \times SQ = ST \times SC$ متوازی ہے $SN \times SQ = ST \times SC$ کے۔
(۵) شکل بالا میں ثابت کرو کہ

$SN \times SQ = ST \times SC = ST \times SC = ST \times SC$
جہاں ت اور ق دیے ہوئے دائرؤں کے ایک راست مشترک مماس کے

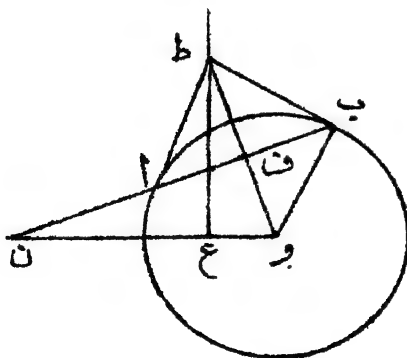
نقاط تماس ہیں۔
(۶) ثابت کرو کہ ایک مثلث کے عانط اور نو نقطی دائرؤں کے مشابہت کے

مرکز مثلث کے عمودی مرکز اور ہندسی مرکز ہیں۔
(۷) ثابہت کرو کہ دو مساوی دائروں کی سیدھی مشابہت کا مرکز لاتنا ہی
پرسہ۔

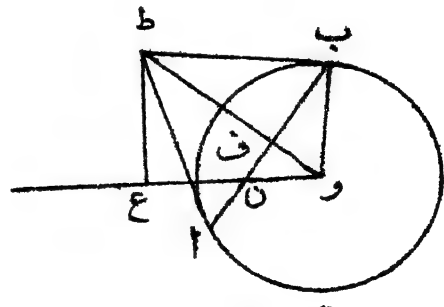
(۸) (۱) (۲) اور (۳) تین دیے ہوئے دائرے ہیں جن کے مرکز
ہم خط نہیں ہیں۔ دائروں (۱) اور (۲) کی سیدھی اور آڑی مشابہت کے مرکز
بالتربیب ش اور ش ہیں۔ اور دائروں (۲) اور (۳) کی سیدھی اور آڑی
مشابہت کے مرکز بالتربیب ش اور ش ہیں اور دائروں (۱) اور (۳) کی سیدھی
اور آڑی مشابہت کے مرکز بالتربیب ش اور ش ہیں۔ ثابہت کرو کہ

(۱) د ش، د ش اور د ش مترکز ہیں
(۲) چھ نقطوں ش، ش، ش، ش، ش، ش میں سے ایسے
تین تین نقطوں کے چار جٹ ہیں جو ہم خط ہیں۔

۴۹۔ ایک دائرے کے ان وتروں کے بیروں پر کے ماسوں کے
نقطہ تقاطع کا طریق جو ایک ثابہت نقطہ میں سے گزرتے ہیں ایک خط مستقیم ہے۔



شکل ۱



شکل ۲

فرض کرو کہ دائرہ (د) کی سطح میں ایک ثابہت نقطہ ن ہے۔ ن میں
گزرنے والا کوئی خط دائرہ (د) سے نقاط ۱ اور ۲ پر ملتا ہے اور ۱ اور ۲ پر

ماسات کا نقطہ تقاطع ط ہے۔ ثابت کرنا ہے کہ ط کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔
 ون کو ملاؤ اور ط سے ون پر عمود ط ع نکالو
 فرض کرو کہ و ط اور اب کا نقطہ تقاطع ف ہے،
 و ب کو ملاؤ۔

چونکہ ف اور ع پر کے زاویے قائم ہیں
 اس لیے نقاط ف، ع، ن، ط مشترک محیط ہیں۔
 اس لیے ون \times و ع = و ط \times و ف = و ب جو ایک مستقل مقدار ہے۔
 اب چونکہ و اور ن ثابت نقطے ہیں اس لیے ع بھی ایک ثابت نقطہ ہے
 اور نقطہ ن میں سے گزرنے والے کسی وتر اب کے سروں پر کے ماسوں کا
 نقطہ تقاطع ط ایک ثابت خط مستقیم پر واقع ہے جو ثابت نقطہ ع میں سے گزرتا
 ہے اور ون پر عمود وار ہے۔ یہ مسئلہ ثابت ہوا۔
 نوٹ :- یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ ع ط پر کے کسی نقطہ سے دائرہ (و)
 تک کھینچے ہوئے ماسوں کا وتر تماس نقطہ ن میں سے گزرتا ہے۔ پس خط ع ط
 طریق کے دونوں شرائط کو پورا کرتا ہے۔

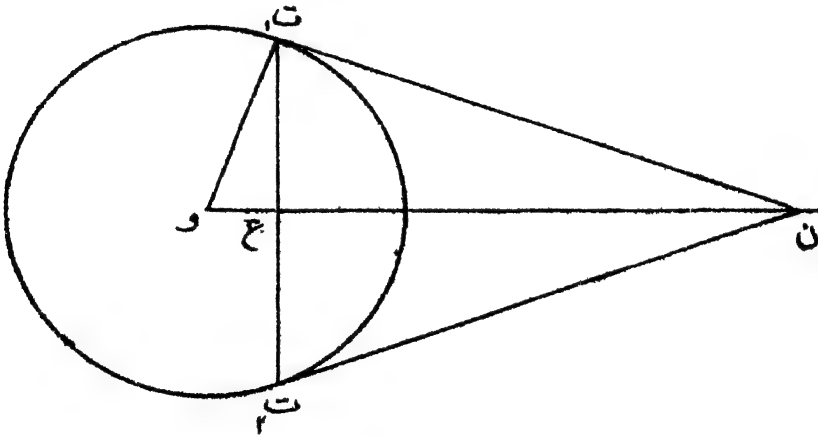
۵۰۔ تعریفات - دفعہ گذشتہ کی ترقیم کے مطابق نقطہ ط
 کا طریق دیے ہوئے دائرہ (و) کے لمحاظ سے نقطہ ن کا قطبی کہلاتا ہے اور
 نقطہ ن دیے ہوئے دائرہ (و) کے لمحاظ سے خط ع ط کا قطب کہلاتا ہے۔
 اگر دائرہ کے مرکز میں سے گزرنے والے کسی خط پر مرکزی ایک ہی جانب
 نقاط ن اور ن اس طرح لیے جائیں کہ ون \times ون = ر جہاں ر دائرہ
 (و) کا نصف قطر ہے تو نقاط ن، ن میں سے ہر ایک بلحاظ دائرہ (و) کے
 دوسرے نقطہ کا مقلوب کہلاتا ہے۔ مثلاً دفعہ گزشتہ کی شکل میں نقاط ن اور
 ع بلحاظ دائرہ (و) کے ایک دوسرے کے مقلوب ہیں کیس جصل ہوا کہ
 بلحاظ دائرہ (و) کے نقطہ ن کا قطبی ایک خط مستقیم ہے جو ن کے مقلوب
 میں سے گزرتا ہے اور ون پر عمود وار ہے۔

۵۱۔ چونکہ ون \times ون = ر جہاں ر دائرہ (و) کا نصف قطر

اس لیے $و$ $ع$ بڑا ہے، مساوی ہے، چھوٹا ہے $و$ سے بموجب اس کے کہ

$و$ $ن$ چھوٹا ہے یا مساوی ہے یا بڑا ہے نصف قطر $ر$ سے پس حاصل ہوا کہ لمحاظ دائرہ $(و)$ کے نقطہ $ن$ کا قطبی دائرہ $(و)$ کو قطع نہیں کرتا ہے، یا مس کرتا ہے، یا قطع کرتا ہے بموجب اس کے کہ نقطہ $ن$ دائرہ کے اندر ہے، دائرہ پر ہے، یا دائرہ کے باہر ہے۔

۵۲۔ مسئلہ۔ اگر نقطہ $ن$ دائرہ $(و)$ کے باہر ہو تو $ن$ کا قطبی اُن مماسات کا وتر تماس ہے جو $ن$ سے دائرہ $(و)$ تک کھینچے جائیں۔ نقطہ $ن$ سے دائرہ $(و)$ کے مماسات $ن$ $ت$ ، $ن$ $ت$ کھینچو۔



فرض کرو کہ وتر تماس $ن$ $ت$ خط $و$ $ن$ سے $ع$ پر ملتا ہے۔

چونکہ مثلث $و$ $ن$ $ت$ قائم الزاویہ ہے اور $ت$ $ع$ عمود ہے وتر $و$ $ن$ پر



اس لیے $و$ $ن$ $ع$ = $و$ $ت$

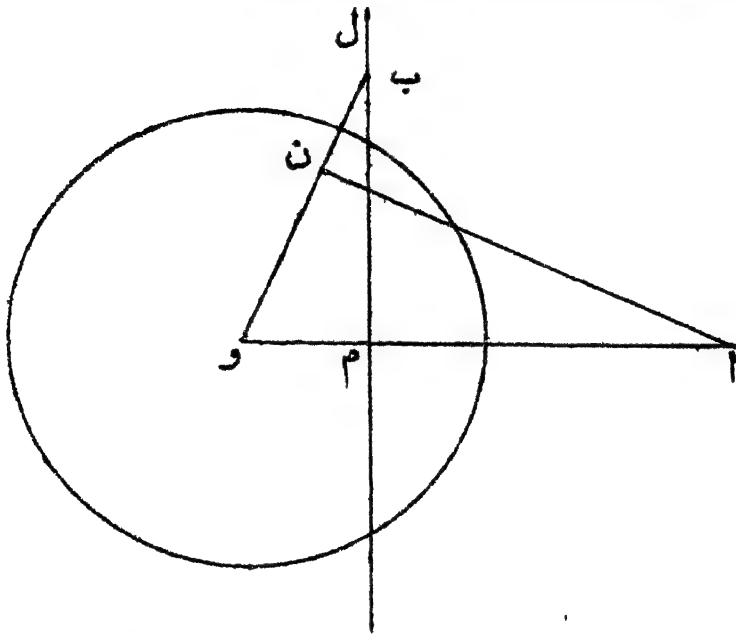
اس لیے لمحاظ دائرہ $(و)$ کے نقاط $ن$ اور $ع$ ایک دوسرے کے

مقلوب ہیں۔

نیز وتر تماس $ن$ $ت$ نقطہ $ن$ کے مقلوب $ع$ میں سے گزرتا ہے

اور ون پر نمودار ہے۔

۵۳۔  اس لیے لمحاظ دائرہ (و) کے نقطہ ۱ کا قطبی وتر تماس ت ہے۔
۵۴۔  اگر لمحاظ دائرہ (و) کے نقطہ ۱ کا قطبی نقطہ ب
میں سے گزرے تو ب کا قطبی ۱ میں سے گزرے گا۔



فرض کرو کہ دائرہ (و) کے لمحاظ سے ایک قطعی خط l م ہے

حسب مفروض خط l م نقطہ b میں سے گزرتا ہے

فرض کرو کہ ۱۰ اور ۱۱ م کا نقطہ تقاطع م ہے

روپ کو ملاؤ اور اسے روپ پر عمود ان نکالو۔

چونکہ ہم اور ن پر کے زاویے قائم ہیں

چونکہ m اور n پر لے زاویے قائم ہیں
اس لیے $DN \times WB = OM \times RA = RA$ جہاں RA دائرہ (د) کا نصف قطر ہے۔

اس لیے بلحاظ دائرہ (د) کے ب کا مقلوب ن ہے

نیز ان اعمود ہے دب پر

اس لیے ب کا قطبی ن ا ہے اور یہ خط نقطہ ا میں سے گزرتا ہے

پس مسئلہ ثابت ہوا۔

نوٹ :- اس مسئلہ کو قطب اور قطبی کی متکافی خاصیت ہے جو سوئم کرتے ہیں۔
مندرجہ بالا مسئلہ سے ظاہر ہے کہ اگر ایک دائرہ کے لحاظ سے دو خطوط میں سے
ایک کا قطب دوسرے پر ہو تو دوسرے کا قطب پہلے پر ہوگا۔

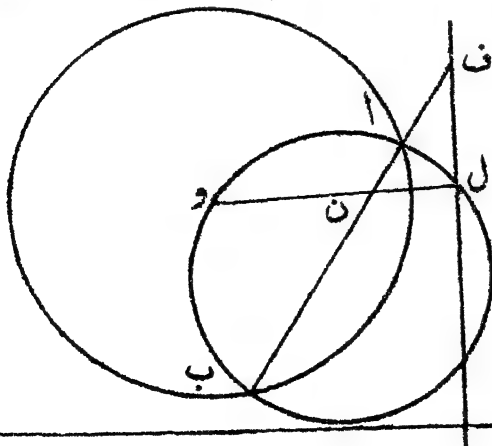
۵۴۔ تعریفات۔

(۱) ایک دیے ہوئے دائرہ کے لحاظ سے دو دیے ہوئے نقطہ
مزدوج نقطہ کہلاتے ہیں۔ اگر ان نقطوں میں سے کسی کا ایک قطبی دوسرے نقطہ
میں سے گزرے۔

(۲) ایک دیے ہوئے دائرہ کے لحاظ سے دو دیے ہوئے خطوط
مزدوج خطوط کہلاتے ہیں اگر ان میں سے کسی ایک خط کا قطب دوسرے خط پر
واقع ہو۔

(۳) اگر ایک دیے ہوئے دائرہ کے لحاظ سے ایک مثلث کے ہر رأس کا
قطبی مقابل کا ضلع ہو تو مثلث مذکور دیے ہوئے دائرہ کے لحاظ سے مثلث
مزدوج بالذات کہلاتا ہے۔

۵۵۔ مسئلہ۔ اگر ایک ثابت نقطہ ن میں سے کوئی خط کھینچا جا
جو ایک دیے ہوئے دائرہ (د) سے نقاط ا اور ب پر اور نقطہ ن کے قطبی
سے ف پر ملے تو ا ب کی موسیقی تقسیم ن اور ف پر ہوتی ہے۔



صورت اول۔ فرض کرو کہ ثابت نقطہ ن دائرہ کے اندر ہے۔

فرض کرو کہ ون کے قطبی سے ل پر ملتا ہے۔

$$\text{تب } \text{ون} \times \text{نل} = \text{ون} (\text{ول} - \text{ون}) = \text{ون} \times \text{ول} - \text{ون}^2$$

$$= \text{وا}^2 - \text{ون}^2 \quad (\text{کیونکہ } \text{ون} \times \text{ول} = \text{وا}^2)$$

$$\text{نیز } \text{بن} \times \text{نل} = \text{وا}^2 - \text{ون}^2$$

$$\text{اس لیے } \text{ون} \times \text{نل} = \text{بن} \times \text{نل}$$

یعنی نقاط و، ب، ل، ا مشترک محیط ہیں

نقاط و، ب، ل، ا میں سے گزرنے والا دائرہ کھینچو۔

اس دائرہ کا وتر و ب = وتر وا، کیونکہ ہر ایک وتر دائرہ (و) کے نصف قطر کے مساوی ہے۔ اس لیے وا اور و ب کے محاذی ل پر مساوی زاویے بنتے ہیں۔

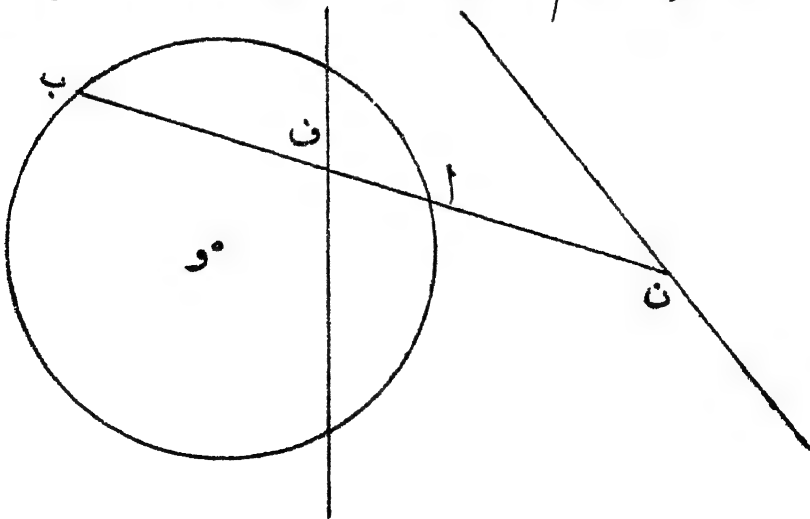
یعنی ل ن اندرونی منصف ہے > ب ل ا کا

نیز چونکہ > ن ل ف قائمہ ہے

اس لیے ل ف خارجی ناصف ہے > ب ل ا کا

اس لیے ا ب کی موسیقی تقسیم ن ا و ف پر ہوتی ہے۔

صورت دوم۔ فرض کرو کہ ثابت نقطہ ن دائرہ کے باہر ہے۔



چونکہ ن کا قطبی ف میں سے گزرتا ہے اس لیے ف کا قطبی ن میں سے گزرے گا۔ اس لیے صورت اول کی رو سے اب کی موسیقی تقسیم ن اور ف پر ہوتی ہے۔

پس مسئلہ ثابت ہوا۔

نوٹ :- اس مسئلہ کو "قطب اور قطبی کی موسیقی خاصیت" سے تعبیر کرتے ہیں اس دفعہ کے مسئلہ کا عکس حسب ذیل ہے :

اگر ایک ثابت نقطہ ن میں سے کوئی خط کھینچا جائے جو ایک دیے ہوئے دائرہ (د) سے نقاط ۱ اور ۲ پر ملے اور ۱ پر ایک نقطہ ف ایسا لیا جائے کہ اب کی موسیقی تقسیم ن اور ف پر ہوتی ہو تو ف کا طریق ن کا قطبی ہوگا۔ اس کا ثبوت طالب علم مشق کے طور پر خود دہم پہنچائے۔

امثلہ ۱۵

(۱) ثابت کرو کہ دو نقطوں کو ملانے والا خط ایک دیے ہوئے دائرہ کے لمحاظ سے ان نقطوں کے قطبیوں کے نقطہ تقاطع کا قطبی ہے۔

(۲) ثابت کرو کہ دو خطوط مستقیم کا نقطہ تقاطع ایک دائرہ کے لمحاظ سے ان خطوط کے قطبیوں کو ملانے والے خط کا قطب ہے۔

(۳) ثابت کرو کہ ایک دیے ہوئے دائرہ کے لمحاظ سے متراکز خطوط کے قطب ہم خط ہیں۔

(۴) ثابت کرو کہ ایک دیے ہوئے دائرہ کے لمحاظ سے ہم خط نقطوں کے قطبی متراکز ہیں۔

(۵) لمحاظ دائرہ (د) کے نقاط ۱ اور ۲ کے قطبی یے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ

۱ و ۲ مساوی ہے اُس زاویہ کے جو ۱ اور ۲ کے قطبیوں سے بنتا ہے۔

(۶) دو ہم مرکز دائروں میں سے کسی ایک کے مماسوں کے قطبیوں کا طریق

لمحاظ دوسرے دائرہ کے معلوم کرو۔

(۷) ثابت کرو کہ ایک دائرہ کے مساوی وتروں کے قطبیوں کا طریق دائرہ مذکور کے

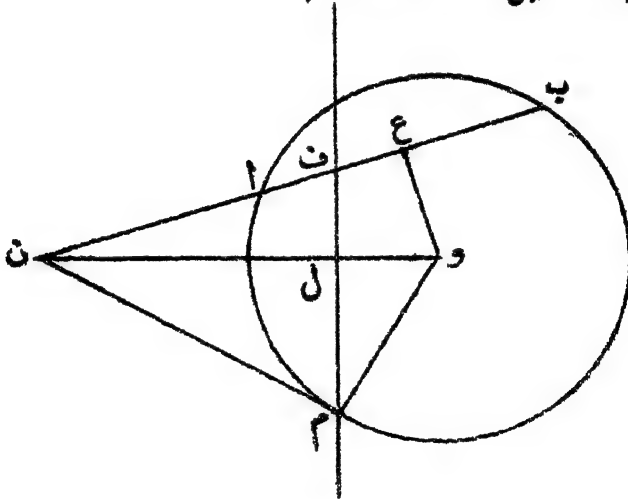
لحاظ سے ایک ہم مرکز دائرہ ہے۔

(۸) دائرہ (و) کے لحاظ سے ۱ اور ب مزدوج نقطے ہیں اور خط ۱ ب کا قطب ج ہے ثابت کرو کہ دائرہ (و) کے لحاظ سے مثلث ۱ ب ج مزدوج بالذات ہے۔
(۹) اگر ایک مثلث بلحاظ ایک دائرہ کے مزدوج بالذات ہو تو ثابت کرو کہ مثلث کا عمودی مرکز دائرہ کے مرکز پر ہوگا۔

(۱۰) اگر دائرہ (و) کے لحاظ سے نقاط ۱ اور ب کے قطبی لیے جائیں اور ۱ ب کے قطبی پر عمود ۱ ل اور ب سے ۱ کے قطبی پر عمود ب م نکالے جائیں تو ثابت کرو کہ ۱ : ب = ۱ ل : ب م

[اسے سامن (Salmon) کا مسئلہ کہتے ہیں]
(۱۱) اگر ایک دیے ہوئے بیرونی نقطہ ن میں سے کوئی خط کھینچا جائے

جو دائرہ (و) سے ۱ اور ب پر اور ن کے قطبی سے ف پرے تو ثابت کرو کہ ن ۱ اور ن ب کا موسیقی اوسط ن ف ہے۔



فرض کرو کہ دائرہ (و) کے لحاظ سے ن کا قطبی خط ون سے ل پر اور

دائرہ (و) سے م پر ملتا ہے۔

ن م اور وم کو ملاؤ اور د سے ۱ ب پر عمود وع نکالو۔

چونکہ ن م دائرہ (و) کا مماس ہے

اس لیے $ن ۱ \times ن ب = ن م = ن ل \times ن و$ (کیونکہ $ن ل م$ قائمہ ہے)
 $ن ف \times ن ع =$ (کیونکہ نقاط د'ع' ف'ل
 مشترک المحيط ہیں)

اس لیے $ن ۲ \times ن ب = ن ف \times ن ۲$
 $ن ف (ن ۱ + ن ب) =$ (کیونکہ ا ب کا
 وسطی نقطہ ع ہے)

$$\frac{ن ۲ \times ن ب}{ن ۱ + ن ب} = \text{اس لیے } ن ف$$

یعنی $ن ف$ موسیقی اوسط ہے $ن ۱$ اور $ن ب$ کا۔

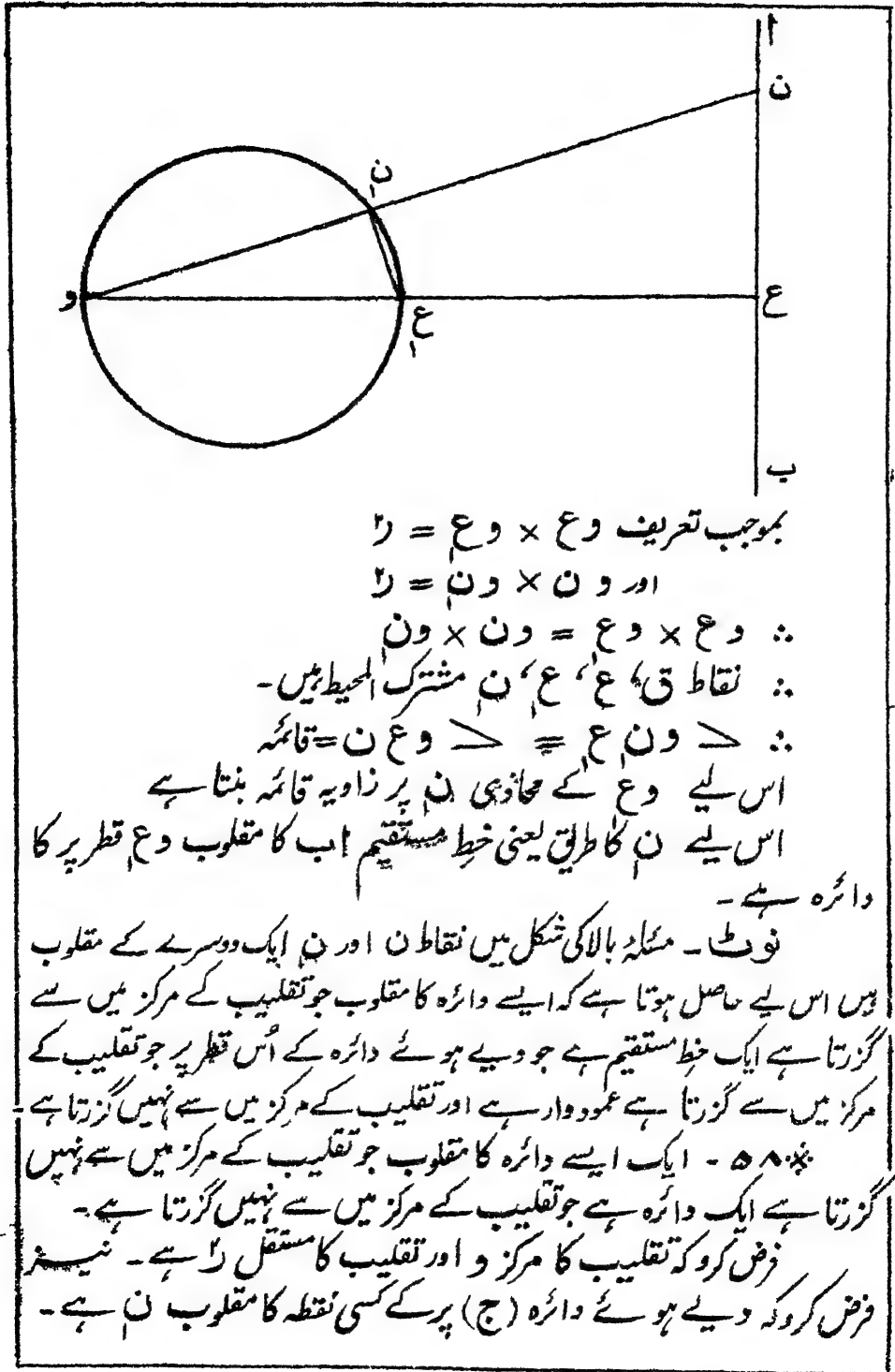
۵۶۔ **تقلیب** - دفعہ ۵۰ کی تعریف کی مدد سے ہم ایک
 دیے ہوئے دائرہ کے لحاظ سے جس کا نصف قطر ہو ایک دیے ہوئے
 نقطہ $ن$ کا مقلوب نقطہ $ن$ معلوم کر سکتے ہیں۔ دائرہ کے مرکز و کو تقلیب کا
 مرکز اور نصف قطر (کو تقلیب کا نصف قطر کہتے ہیں۔
 نیز بعض اوقات را کو تقلیب کا مستقل کہتے ہیں۔ اور دائرہ کو
 تقلیب کا دائرہ کہتے ہیں۔

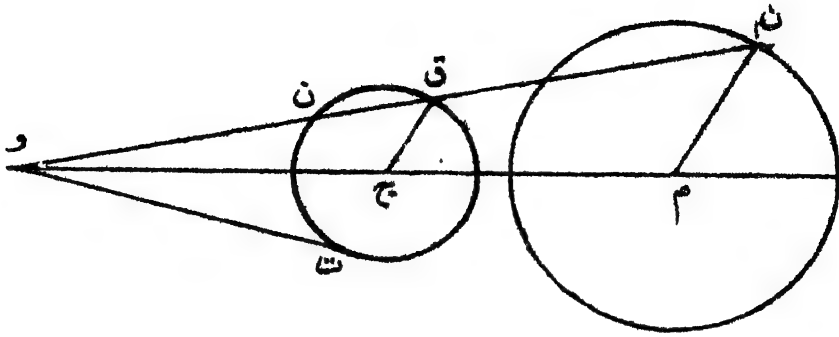
اگر $ن$ کوئی طریق ترسم کرے تو $ن$ کے مقلوب $ن$ کے طریق کو
 $ن$ کے طریق کا مقلوب کہتے ہیں۔

مندرجہ بالا تعریفات سے ظاہر ہے کہ تقلیب کے مرکز میں سے گزرنے والا
 ہر خط اپنا آپ مقلوب ہے۔

۵۷۔ **مسئلہ** - ایک ایسے خط مستقیم کا مقلوب جو تقلیب کے
 مرکز میں سے نہ گزرے تقلیب کے مرکز میں سے گزرنے والا ایک دائرہ ہوگا۔
 فرض کرو کہ دیا ہوا خط مستقیم ا ب ہے اور تقلیب کا مرکز و اور
 تقلیب کا نصف قطر ہے۔

و سے ا ب پر عمود و ع نکالو اور ع کا مقلوب ع معلوم کرو۔
 نیز ا ب پر کے کسی نقطہ $ن$ کا مقلوب $ن$ معلوم کرو۔





تقلیب کے مرکز و سے دائرہ (ج) کا ایک ماس و ت کمینچو فرض کرو کہ
 طول و ت = م
 نیز فرض کرو کہ خط و ن دائرہ (ج) سے کرر نقطہ ق پر ملتا ہے۔
 ق ج کو ملاؤ اور ن م متوازی ق ج کے کمینچو جو و ج سے م پر ملے۔
 چونکہ و ن × و ن = ر_ج
 اور و ن × و ق = م

اس لیے $\frac{و ن}{و ق} = \frac{ر_{ج}}{م}$ جو ایک مستقل مقدار ہے

نیز تشابہ مثلثات و م ن اور و ج ق سے

$\frac{و م}{و ج} = \frac{م ن}{ج ق} = \frac{و ن}{و ق}$ جو ایک مستقل مقدار ہے

اس لیے م ایک ثابت نقطہ ہے اور م ن کا طول مستقل ہے۔
 پس ثابت ہوا کہ ن کا طریق یعنی دیے ہوئے دائرہ (ج) کا مقلوب
 بلحاظ مرکز و کے ایک دائرہ ہے جس کا مرکز م ہے۔

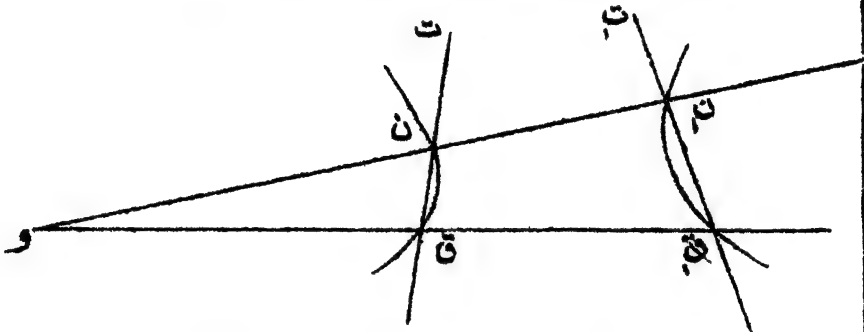
※ ۵۹ - تعریفات -

(۱) اگر ایک منحنی پر دو نقطے ن اور ق ہوں تو وتر ن ق کا

انتہائی مقام جب کہ نقطہ ق منحنی پر حرکت کر کے نقطہ ن کے بے انتہا قریب آجاتا ہے منحنی کے نقطہ ن پر کا ماس کہلاتا ہے۔
اس تعریف سے ظاہر ہے کہ خط مستقیم کے کسی نقطہ پر کا ماس خود وہی خط مستقیم ہے۔

(۲) دو متقاطع منحنیوں کے نقطہ تقاطع پر کے ماسوں کا درمیانی زاویہ منحنیوں کا زاویہ تقاطع کہلاتا ہے۔

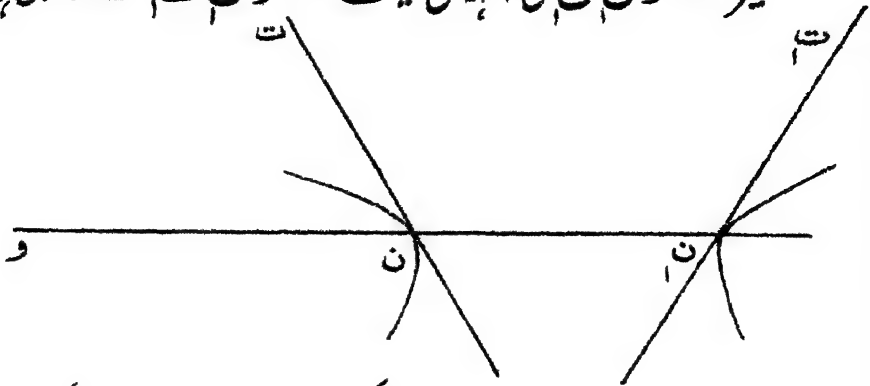
* ۶۰۔ - تقليب کے مرکز میں سے گزرنے والا کوئی خط مستقیم ایک منحنی اور اس کے مقلوب کو مکمل زاویوں پر قطع کرتا ہے۔



فرض کرو کہ تقليب کا مرکز و اور نصف قطر ر ہے۔
منحنی پر دو نقطہ ن اور ق ایک دوسرے کے قریب ہیں اور ان کے مقلوب ن اور ق ہیں جو لازماً ایک دوسرے کے قریب واقع ہونگے۔
ق ن کو ت تک اور ق ن کو ت تک خارج کرو۔
 $د ن \times و ن = د ق \times و ق$ کیونکہ ہر ایک مقدار تقليب کے مستقل ر کے مساوی ہے۔

اس لیے ن، ن، ق، ق مشترک محیط ہیں۔
اس لیے زاویے و ن ت اور و ق ن مکمل زاویے ہیں۔
اب جوں جوں نقطہ ق نقطہ ن کے قریب آتا ہے، ویسے ہی نقطہ ق بھی ن کے قریب آئیگا اور انتہائی خطوط ق ن ت اور ق ن ت بالترتیب

نقاطن اور ن پر مخنیوں کے ماسات ن ت اور ن ت بن جائینگے۔
نیز > و ق ن کی انتہائی قیمت > و ن ت کے مساوی ہوگی۔



اس لیے و ن ت اور و ن ت مکمل زاویے ہیں۔ یہی ثابت کرنا تھا۔
نوٹ :- مندرجہ بالا نتیجہ کی مدد سے یہ آسانی ثابت ہو سکتا ہے کہ دو متقاطع
مخنیوں کا زاویہ تقاطع ان کے متغلوں کے زاویہ تقاطع کے مساوی ہوتا ہے۔ نیز اگر
دو مخنی ایک دوسرے کو کسی نقطہ ق پر مس کریں تو ان کے متغلوں بھی ایک دوسرے
کو ق کے متغلوں نقطہ ق پر مس کریں گے۔

۶۱۔ تعریف :- اگر دو دائروں کا زاویہ تقاطع زاویہ قائمہ ہو تو
یہ دائرے علی القوائم دائرے کہلاتے ہیں۔ یا یوں کہا جاتا ہے کہ یہ
دائرے ایک دوسرے کو علی القوائم قطع کرتے ہیں۔
اس تعریف سے ظاہر ہے کہ اگر دو دائرے ایک دوسرے کو
علی القوائم قطع کریں تو کسی ایک نقطہ تقاطع پر ہر دائرہ کا ماس دوسرے
دائرہ کے مرکز میں سے گزرے گا۔

مندرجہ بالا نتیجہ کو یوں بھی بیان کیا جاسکتا ہے ”دو علی القوائم دائروں
کے کسی ایک نقطہ تقاطع تک پہنچے ہوئے نصف قطر ایک دوسرے پر
علی القوائم ہوتے ہیں۔ اور دائروں کے مرکروں کے درمیانی فاصلہ کا
مربع ان کے نصف قطروں کے مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا
ہے۔“

امثلہ ۱۶

(۱) اگر تقلیب کے مرکز و میں سے گزرنے والے ایک خط مستقیم پر کے تین نقطوں 'ن' 'ق' 'ط' کے مقلوب 'ن' 'ق' 'ط' ہوں تو ثابت کرو کہ (ا) اگر 'ون' 'وق' 'وط' سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو 'ون' 'وق' 'وط' سلسلہ موسیقیہ میں ہوں گے۔ (ب) 'ون' 'وق' 'وط' سلسلہ ہندسیہ میں ہوں تو 'ون' 'وق' 'وط' سلسلہ ہندسیہ میں ہوں گے۔

(۲) ایک خط مستقیم ایک دائرہ کو قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ تقلیب کے مرکز اور نصف قطر کے مناسب انتخاب سے دیا ہوا خط دیے ہوئے دائرہ میں منقلب کیا جاسکتا ہے۔

(۳) اگر ایک دیے ہوئے دائرہ کے باہر کے کسی نقطہ پر تقلیب کا مرکز لیا جائے تو ثابت کرو کہ تقلیب کے نصف قطر کے مناسب انتخاب سے دیا ہوا دائرہ اپنے آپ میں منقلب ہو سکتا ہے۔

(۴) اگر تقلیب کے مرکز و اور نصف قطر کے لحاظ سے نقاط 'ن' اور 'ق' کے مقلوب 'ن' اور 'ق' ہوں تو ثابت کرو کہ $\frac{ون}{وق} = \frac{ن}{ق}$ ۔

(۵) اگر تقلیب کے مرکز میں سے گزرنے والے کسی خط پر کے دو نقطوں 'ن' اور 'ق' کے مقلوب 'ن' اور 'ق' ہوں اور تقلیب کے دائرہ پر کوئی نقطہ لا ہو تو ثابت کرو کہ $\frac{ون}{وق} = \frac{ن}{ق}$ ۔

(۶) اُن دائروں کے مرکزوں کا طریق معلوم کرو جو ایک دیے ہوئے دائرہ کو ایک دیے ہوئے نقطہ پر علی القوائم قطع کریں۔

(۷) ایک دائرہ کھینچو جو ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے گزرے اور ایک دیے ہوئے دائرہ کو ایک دیے ہوئے نقطہ پر علی القوائم قطع کرے۔

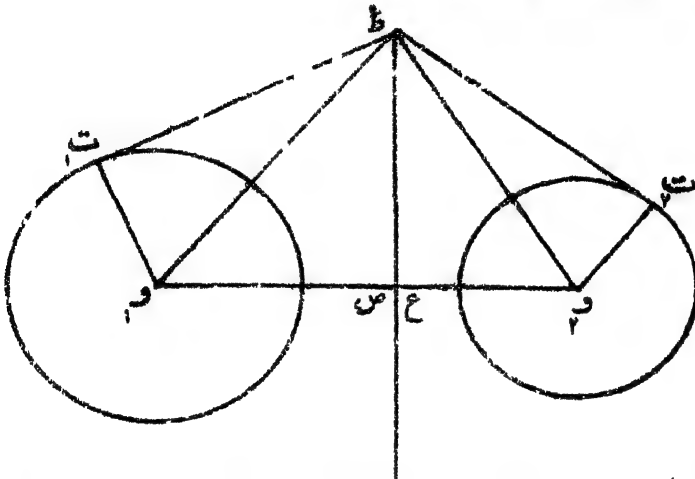
(۸) ایک دیے ہوئے نصف قطر والا ایک دائرہ کھینچو جو ایک دیے ہوئے دائرہ کو ایک دیے ہوئے نقطہ پر علی القوائم قطع کرے۔

(۹) ثابت کرو کہ دو علی القوائم دائروں میں سے ایک کے کسی قطر کی موسیقی تقیم

دوسرے کے محیط پر ہوتی ہے۔ (دیکھو دفعہ ۹۲)۔

(۱۰) بمحاظ دائرہ (و) کے نقطہ ن کا متغلوب ن بیے ثابت کرو کہ نقاط ن اور ن میں سے گزرنے والا ہر دائرہ، دائرہ (و) کو علی التوائم قطع کرتا ہے۔
(۱۱) بمحاظ دائرہ (و) کے نقطہ ن اور ق مزدوج نقطے ہیں۔ ثابت کرو کہ وہ دائرہ جس کا قطر ن ق ہے، دائرہ (و) کو علی التوائم قطع کرتا ہے۔

۶۲۔ مسئلہ۔ اُس نقطہ کا طریق جس سے دو دیے ہوئے دائرہ تک کھینچے ہوئے عامس مساوی ہوں ایک خط مستقیم ہے جو دائروں کے مرکوزوں کو ملانے والے خط پر عمود وار ہوتا ہے۔



فرض کرو کہ (و) اور (و') دو دیے ہوئے دائرے ہیں جن کے نصف قطر بالترتیب ل اور ل' ہیں۔ نیز فرض کرو کہ نقطہ ط سے ان دائروں تک کھینچے ہوئے عامسات ط ت اور ط ت' مساوی ہیں۔
ط'، و ت'، و ط' اور و ت کو ملاؤ اور ط سے و و' پر عمود ط ع نکالو۔

چونکہ حسب مفروض ط ت = ط ت'

∴ ط ت' = ط ت

∴ ط و' - و ت' = ط و - و ت

$$\therefore \text{ع ط}^2 + \text{د ع}^2 - \text{د ت}^2 = \text{ع ط}^2 + \text{د ع}^2 - \text{د ت}^2$$

$$\therefore \text{د ع}^2 - \text{د ت}^2 = \text{د ع}^2 - \text{د ت}^2$$

$$= \text{د}^2 - \text{ت}^2 \text{ جو ایک مستقل مقدار ہے۔}$$

$$\text{لیکن } \text{د ع}^2 - \text{د ت}^2 = (\text{د ع} + \text{د ت})(\text{د ع} - \text{د ت})$$

$$= \text{د}^2 - \text{ت}^2 \text{ (۲ ص ع) جہاں د و د کا وسطی نقطہ ص ہے}$$

$$\therefore ۲ \text{ د}^2 - \text{ت}^2 = \text{ع}^2 - \text{د}^2 \text{ جس سے حاصل ہوتا ہے کہ مرکزوں}$$

کو ملانے والے خط پر ع ایک ثابت نقطہ ہے۔
پس ثابت ہوا کہ نقطہ ط کا طریق ایک خط مستقیم ہے جو مرکزوں کے
خط پر عمود وار ہے۔

نوٹ - ثبوت بالا میں یہ بات ضمناً ثابت ہوئی ہے کہ نقطہ ع مرکزوں کے
خط کو دو ایسے حصوں میں تقسیم کرتا ہے جن کے مربعوں کا فرق دیے ہوئے دائروں کے نصف،
قطروں کے مربعوں کے فرق کے مساوی ہے۔

طالب علم بطور مشق کے یہ ثابت کرے کہ اس صورت میں طریق کی دوسری شرط
بھی پوری ہوتی ہے یعنی اس طریق پر کے کسی نقطہ سے دائروں تک کھینچے ہوئے ماسا
مساوی ہیں۔

۴۳ - تعریف - اُس نقطہ کا طریق جس سے دو دیے ہوئے دائروں
اتک کھینچے ہوئے ماس مساوی ہوں دیے ہوئے دائروں کا بنیادی محور
کہلاتا ہے۔

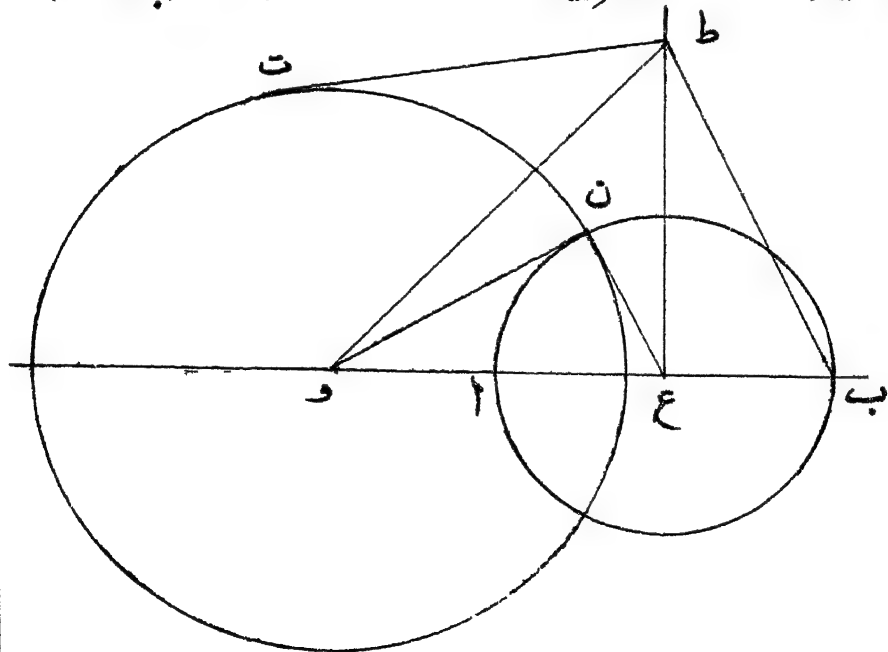
نوٹ (۱) - اگر دیے ہوئے دائرے متقاطع ہوں تو صرفاً ان کے نقاط تقاطع
مطلوبہ طریق پر واقع ہیں۔ اس لیے مطلوبہ طریق ان نقاط تقاطع میں سے گزرنے والا
خط مستقیم یعنی دیے ہوئے دائروں کا وتر مشترک (ممدومہ) ہے۔ وتر مشترک کے
اس حصہ پر کے کسی نقطہ سے جو دیے ہوئے دائروں کے اندر ہے دائروں کے کوئی حقیقی
ماس نہیں کھینچ سکتے ہیں، لیکن کہا جاتا ہے کہ خیالی ماس کھینچ سکتے ہیں اور ان کے خیالی طول
مساوی ہیں۔ اس نکتہ کی مزید تشریح ہندوستانی تحلیلی کی کسی کتاب میں پائی جاسکتی ہے۔

يعني طم = طسم

یعنی نقطہ ط دیے ہوئے دائرؤں (د) اور (فہ) کے بنیادی محور پر کا ایک نقطہ ہے۔ اور چونکہ ط ع مرکزوں کے خط د فہ پر عمود ہے، اس لیے ط ع دیے ہوئے دائرؤں کا بنیادی محور ہے۔

نوٹ۔ متقاطع دائرؤں کا بنیادی محور کھینچنے کے لیے اس طولانی عمل کی ضرورت نہیں ہے کیونکہ ان کے تقاطع قطع میں سے گزرنے والا خط مستقیم ہی بنیادی محور ہوتا ہے۔

۶۵۔ مسئلہ۔ اگر ایسے دائرے کھینچے جائیں جن کے مرکز ایک دیے ہوئے دائرہ کے ایک قطر محدودہ پر ہوں اور جو دیے ہوئے دائرہ کو علی القوائم قطع کریں تو ان دائرؤں میں سے کسی دو دائرؤں کا بنیادی محور وہ خط مستقیم ہوگا جو دیے ہوئے دائرہ کے مرکز میں سے گذرے اور دیے ہوئے قطر پر عمود وار ہو۔



فرض کرو کہ دیا ہوا دائرہ (ع) ہے۔ اس کے ایک ثابت قطر اب محدودہ پر کوئی نقطہ و لو اور و کو مرکز مان کر ایک دائرہ کھینچو جو دائرہ (ع) کو نقطہ ن پر

علی القوائم قطع کرے۔ دیے ہوئے دائرہ کے مرکز ع میں سے ایک خط مستقیم کھینچو جو ثابت قطر اب پر عمود وار ہو اور اس قطر پر کوئی نقطہ ط لو اور ط سے دائرہ (و) کا تماس ط ت کھینچو۔
 و ط، و ن، ع ن اور ط ب کو ملاؤ۔

$$\begin{aligned} \text{تب} \quad \text{ط ت} &= \text{ط و} - \text{و ن} \\ &= \text{ط ع} + \text{ع} - \text{و ع} - \text{و ع} - \text{ع ن} \\ &= \text{ط ع} + \text{ع ن} \\ &= \text{ط ع} + \text{ع ب} \end{aligned}$$

= ط ب، جو و کے تمام مقاموں کے لیے مستقل ہے۔
 اس لیے دائرہ (و) جیسے کسی دو دائروں کا بنیادی محور خط مستقیم ع ط، یہی ثابت کرنا تھا۔

نوٹ۔ چونکہ نقطہ ع دائرہ (و) کے باہر واقع ہے، اس لیے بنیادی محور ع ط دائرہ (و) کو قطع نہیں کرتا ہے۔ اس لیے ظاہر ہے کہ (و) جیسے دائروں میں سے کوئی دو دائرے ایک دوسرے کو قطع نہیں کرتے ہیں۔

۶۶۔ تعریفات۔ اگر دائروں کا ایک نظام ایسا ہو کہ ان میں سے کسی دو دائروں کا ایک ہی بنیادی محور ہو تو یہ دائرے ہم محور دائرے کہلاتے ہیں۔ دفعہ گذشتہ میں نہ قطع کرنے والے ہم محور دائروں کا ایک نظام حاصل کرنے کے طریقہ کی تشریح کی گئی ہے۔ ظاہر ہے کہ دائرہ (و) کا مرکز دائرہ (ع) کے قطر اب کے اندر واقع نہیں ہو سکتا

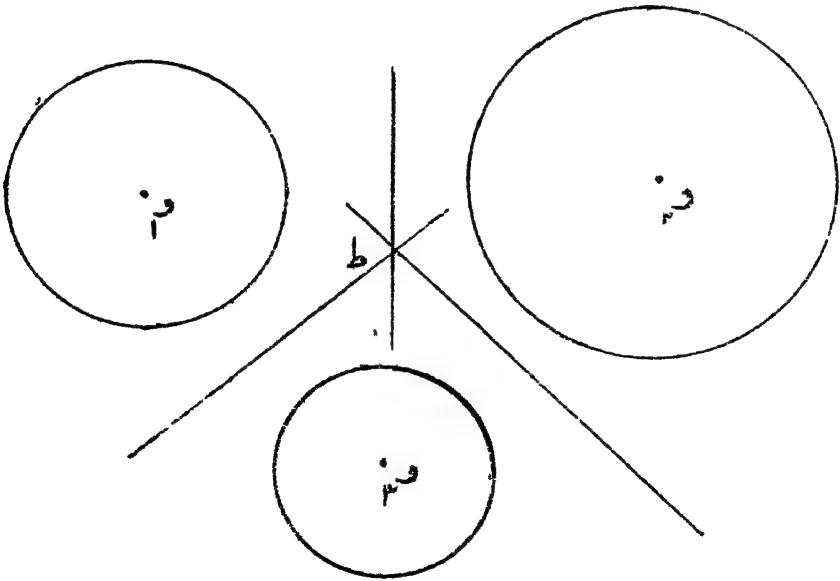
$$\begin{aligned} \text{یعنی} \quad \text{و ع} &+ \text{ع ب} \\ \text{نیز} \quad \text{و ن} &= \text{و ع} - \text{ع ن} \\ &= \text{و ع} - \text{ع ب} \end{aligned}$$

اس لیے جو جوں نقطہ و دائرہ (ع) کے قریب آتا ہے، ویسے ہی دائرہ (و) کا نصف قطر بتدریج گھٹتا ہے اور جب نقطہ و نقاط ۱ اور ب میں سے کسی ایک پر منطبق ہوتا ہے تو دائرہ (و) کا نصف قطر صفر ہے۔ نقاط ۱ اور ب

ہم محور دائروں کے اُس نظام کے انتہائی نقطے کہلاتے ہیں جس کا مرکز دائرہ (ع) کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔ ہم محور دائروں کے نظام کے انتہائی نقطے نظام کے نقطہ دائرے بھی کہلاتے ہیں۔

اگر متعدد دائرے ایسے ہوں کہ ان میں سے ہر ایک دائرہ دوسرا یا تینوں میں سے گزرتا ہے تو ان دائروں سے قطع کرنے والے ہم محور دائروں کا ایک نظام حاصل ہوتا ہے اور اس نظام کا چھوٹے سے چھوٹا دائرہ وہ دائرہ ہے جو وتر مشترک کے قطر پر کھینچا گیا ہے۔ اس لیے قطع کرنے والے ہم محور دائروں کے نظام کی صورت میں انتہائی نقطے یا نقطہ دائرے وجود نہیں رکھتے ہیں۔

۶۷۔ مسئلہ۔ تین دائروں میں سے دو دو دائروں کے تین بنیادی محور متراکز ہوتے ہیں۔



فرض کرو کہ (د)، (د)، اور (د) تین دیے ہوئے دائرے ہیں۔ نیز فرض کرو کہ دائروں (د) اور (د) کا بنیادی محور دائروں (د) اور (د) کے بنیادی محور کو نقطہ ط پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرنا ہے کہ دائروں (د) اور (د)

بنیادی محور نقطہ ط میں سے گزرتا ہے۔
 چونکہ نقطہ ط دائرؤں (۴) اور (۵) کے بنیادی محور پر ہے، اس لیے
 ط سے دائرؤں (۴) اور (۵) تک کھینچے ہوئے ماسوں کے طول مساوی ہیں۔
 اسی طرح ط سے دائرؤں (۶) اور (۷) تک کھینچے ہوئے ماسوں
 کے طول بھی مساوی ہیں۔

اس لیے ط سے دائرؤں (۴) اور (۵) تک کھینچے ہوئے ماسوں کے
 طول مساوی ہیں۔

اس لیے نقطہ ط دائرؤں (۴) اور (۵) کے بنیادی محور پر واقع ہے۔
 یعنی دائرؤں (۴) اور (۵) کے بنیادی محور نقطہ ط میں سے گزرتا ہے۔
تشریف۔ تین دائرؤں میں سے دو دو کے تین بنیادی محورؤں کے
 نقطہ تراکز کو ان دائرؤں کا بنیادی مرکز کہتے ہیں۔

نوٹ (۱)۔ اگر دیے ہوئے تینوں دائرؤں کے مرکز ہم خط ہوں تو ظاہر
 کہ تینوں بنیادی محور متوازی ہونگے اور اس صورت میں ان کا نقطہ تقاطع یعنی
 بنیادی مرکز لاتنا ہی پر ہوگا۔

نوٹ (۲)۔ اگر بنیادی محورؤں کا نقطہ تقاطع دیے ہوئے تین دائرؤں میں
 سے ایک کے اندر ہو (جس کا لازمی نتیجہ یہ ہے کہ وہ دوسرے دو دائرؤں کے بھی اندر
 ہوگا) تو نقطہ ط سے دیے ہوئے دائرؤں تک حقیقی ماس نہیں کھینچ سکتے۔ اس لیے
 مسئلہ بالا کے ثبوت میں مناسب تبدیلی کی ضرورت ہوگی۔ یہ ثبوت بطور مشق کے طالب علم
 خود بہم پہنچائے۔

نوٹ (۳)۔ اگر بنیادی محورؤں کا نقطہ تقاطع ط دائرؤں کے اندر ہو تو
 اس صورت میں بھی نقطہ ط کو دیے ہوئے تین دائرؤں کا بنیادی مرکز کہتے ہیں۔
 ہندسہ تحلیلی میں یہ ثابت کیا جائیگا کہ اس صورت میں بنیادی مرکز سے دیے ہوئے
 تین دائرؤں تک کھینچے ہوئے خیالی ماسات کے خیالی طول مساوی ہیں۔

امثلہ ۱

(۱) ثابت کرو کہ دو دائرؤں کا بنیادی محور ان دائرؤں کے مشترک ماسوں

کی تنصیف کرتا ہے۔

(۲) اگر دو دائرؤں کے بنیادی محور پر کے کسی نقطہ سے ان دائرؤں میں سے کسی ایک کا تماس کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ وہ دائرہ جس کا مرکز یہ نقطہ ہے اور نصف قطر تماس کا طول ہے دیے ہوئے دونوں دائرؤں کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔

(۳) اگر دو دائرے ایک دوسرے کو مس کریں تو ثابت کرو کہ ان کا بنیادی محور نقطہ تماس پر کا مشترک تماس ہے۔

(۴) اگر تین دائرؤں میں سے ہر دو ایک دوسرے کو مس کریں تو ثابت کرو کہ نقاط تماس پر کے تماس متراکز ہوتے ہیں۔

(۵) اگر ایک مثلث کے ضلعوں کو قطر مان کر تین دائرے کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ ان دائرؤں کا بنیادی مرکز مثلث کا مرکز عمودی ہے۔

(۶) تین دیے ہوئے دائرؤں کا بنیادی مرکز وہ ہے اور وہ سے ان دائرؤں میں سے کسی ایک کا تماس و ت کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ دائرہ جس کا مرکز وہ اور نصف قطر وہ ہے دیے ہوئے تینوں دائرؤں کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔

(۷) ثابت کرو کہ وہ تمام دائرے جو ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے گزریں اور ایک دیے ہوئے دائرہ کو علی القوائم قطع کریں ایک اور ثابت نقطہ میں سے بھی گزریں گے۔

(۸) ان دائرؤں کے مرکروں کا طریق معلوم کرو جو ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے گزریں اور ایک دیے ہوئے دائرہ کو علی القوائم قطع کریں۔

(۹) ایک دائرہ کھینچو جو دو دیے ہوئے نقطوں میں سے گزرے اور ایک دیے ہوئے دائرہ کو علی القوائم قطع کرے۔

(۱۰) ایک دائرہ کھینچو جو ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے گزرے اور دو دیے ہوئے دائرؤں کو علی القوائم قطع کرے۔

(۱۱) (۱) اور (۲) دو دیے ہوئے دائرے ہیں۔ نقطہ ط اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ط سے دائرؤں (۲) اور (۱) تک کھینچے ہوئے تماسوں کے مربعوں کا

فرق مستقل ہے۔ ثابت کرو کہ ط کا طریق ایک خط مستقیم ہے جو دیے ہوئے دائرؤں کے بنیادی محور کے متوازی ہے۔

پانچواں باب

دائروں کا بنانا

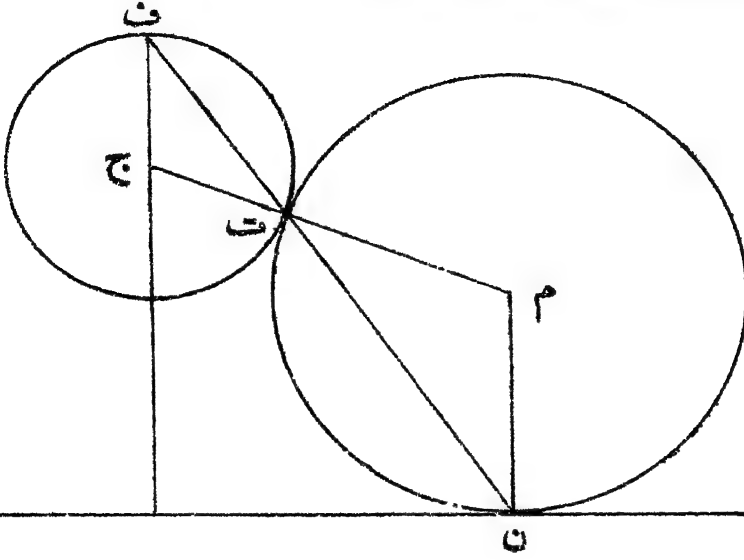
- ۶۸۔ تین شرائط کے دیے جانے پر ایک دائرہ بنایا جاسکتا ہے۔ مثلاً (۱) تین دیے ہوئے نقطوں میں سے جو ایک خط مستقیم میں نہیں ہیں ایک دائرہ کھینچ سکتا ہے (۲) ایک دائرہ کھینچ سکتا ہے جس کا نصف قطر دیا ہوا ہو اور جو ایک دیے ہوئے خط (یا دائرہ) کو ایک دیے ہوئے نقطہ پر مس کرے۔
- ۶۹۔ دو شرائط کو پورا کرنے والے دائروں کے مرکزوں کے طریق کے متعلق مندرجہ ذیل اہم نتائج سے طالب علم پہلے ہی سے واقف ہوگا۔
- (۱) اُس دائرہ کے مرکز کا طریق جس کا نصف قطر معلوم ہو اور جو ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے گزرے ایک دائرہ ہے جس کا مرکز دیے ہوئے نقطہ پر ہے۔
- (۲) اُس دائرہ کے مرکز کا طریق جو دو دیے ہوئے نقطوں میں سے گزرے دیے ہوئے نقطوں کو ملانے والے خط مستقیم کا عمودی منصف ہے۔
- (۳) اُس دائرہ کے مرکز کا طریق جو دو دیے ہوئے متقاطع خطوط کو مس کرے ان خطوط کے درمیانی زاویوں کے منصف ہیں۔
- (۴) ایک دیے ہوئے خط کو ایک دیے ہوئے نقطہ پر مس کرنے والے دائرہ کے مرکز کا طریق ایک خط ہے جو نقطہ مذکور میں سے گزرتا ہے اور دیے ہوئے خط پر عمود ہے۔

- (۵) ایک دیے ہوئے دائرہ کو ایک معلومہ نقطہ پر مس کرنے والے دائرہ کے مرکز کا طریق معلومہ نقطہ کو دائرہ کے مرکز سے ملانے والا خط ہے۔
- (۶) ایک ایسے دائرہ کے مرکز کا طریق جس کا نصف قطر معلوم ہے اور جو ایک دیے ہوئے خط کو مس کرتا ہے دیے ہوئے خط کے متوازی خطوط کا ایک جوڑا ہے۔
- (۷) ایک ایسے دائرہ کے مرکز کا طریق جس کا نصف قطر معلوم ہے اور جو ایک دیے ہوئے دائرہ کو مس کرتا ہے دیے ہوئے دائرہ کے ساتھ ہم مرکز دائروں کا ایک جوڑا ہے۔

امثلہ ۱۸

- (۱) ایک دائرہ کھینچو جو ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے گزرے اور ایک دیے ہوئے خط کو ایک دیے ہوئے نقطہ پر مس کرے۔
- (۲) دیے ہوئے نصف قطر والا ایک دائرہ کھینچو جو دو معلومہ نقطوں میں سے گزرے۔
- (۳) دیے ہوئے نصف قطر والا دائرہ کھینچو جو دو دیے ہوئے خطوں (یا دائروں) کو مس کرے۔ اس سوال کے کتنے حل ہیں؟
- (۴) دیے ہوئے نصف قطر والا ایک دائرہ کھینچو جو ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے گزرے اور ایک دیے ہوئے خط کو یا ایک دیے ہوئے دائرہ کو مس کرے۔
- (۵) ایک دائرہ کھینچو جو ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے گزرے اور ایک دیے ہوئے دائرہ کو ایک دیے ہوئے نقطہ پر مس کرے۔
- ۷۰۔ مسئلہ عملی۔ ایک دائرہ کھینچنا جو ایک دیے ہوئے دائرہ (ج) کو مس کرے اور ایک دیے ہوئے خط مستقیم لاھا کو ایک دیے ہوئے نقطہ پر مس کرے۔

تحلیل - فرض کرو کہ دائرہ (م) مطلوبہ دائرہ ہے اور یہ دیکھئے
دائرہ (ج) کو نقطہ ت پر مس کرتا ہے۔



فرض کرو کہ ن ت دائرہ (ج) سے مکرر نقطہ ف پر ملتا ہے۔

ج ف، ج ت، م ت اور م ن کو ملاؤ۔

مثلث متساوی الساقین م ن ت میں

(۱) $\angle م ن ت = \angle م ت ن$

نیز مثلث متساوی الساقین ج ت ف میں

(۲) $\angle ج ف ت = \angle ج ت ف$

لیکن چونکہ دائرہ (م) دائرہ (ج) کو نقطہ ت پر مس کرتا ہے

اس لیے م ت ج خط مستقیم ہے

(۳) اس لیے $\angle م ت ن = \angle ج ت ف$

نتیجہ (۱)، (۲)، (۳) کو ملائے سے حاصل ہوتا ہے کہ

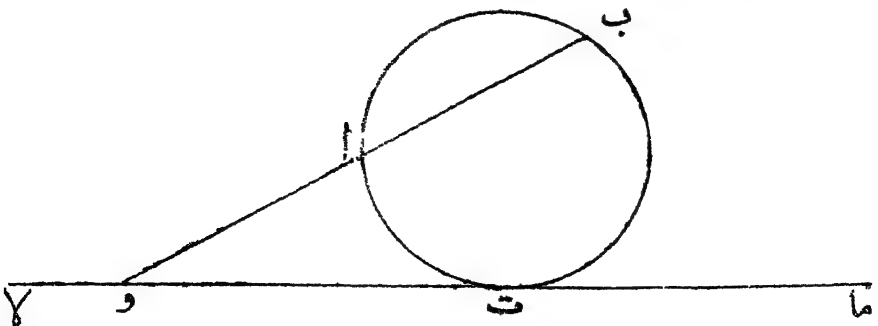
$\angle م ن ت = \angle ج ف ت$

اس لیے ج ف // م ن

اب چونکہ دائرہ (م) خط لاما کو نقطہ ن پر مس کرتا ہے
 اس لیے م ن عمود ہے لاما پر
 اس لیے ج ف بھی عمود ہے لاما پر
 پس اگر دیے ہوئے دائرہ کے مرکز ج سے دیے ہوئے خط لاما پر
 عمود کھینچا جائے تو اس عمود اور دائرہ (ج) کے نقطہ تقاطع سے نقطہ ف حاصل
 ہوتا ہے اور ف ن اور دائرہ (ج) کا نقطہ تقاطع ت مطلوبہ نقطہ تماس ہے
 اور ج ت اور ن م کے تقاطع سے مطلوبہ دائرہ کا مرکز م حاصل ہوتا ہے۔
 اس تحلیل کی بناء پر طالب علم اس عملی مسئلہ کا حل مع ثبوت خود ہی پہنچائے
 نوٹ - وہ خط جو ج میں سے گزرتا ہے اور لاما پر عمود ہے دائرہ (ج)
 کو ایک اور نقطہ ف پر بھی کاٹتا ہے جس کی مدد سے دیے ہوئے شرائط کو پورا
 کرنے والا ایک اور دائرہ بھی کھینچ سکتا ہے۔
 نوٹ - مندرجہ بالا طریقہ آسانی ذیل کے عملی مسئلہ کے حل کے طریقہ کی طرف
 رہنمائی کرتا ہے۔

مسئلہ عملی - ایک دائرہ کھینچنا جو ایک دیے ہوئے دائرہ (ج) کو
 ایک دیے ہوئے نقطہ ت پر مس کرے اور ایک دیے ہوئے خط لاما کو بھی
 مس کرے۔

اس عملی مسئلہ کا حل مع ثبوت طالب علم خود بطور مشق کے ہم پہنچائے۔
مسئلہ عملی - ایک دائرہ کھینچنا جو ایک دیے ہوئے خط لاما کو مس کرے

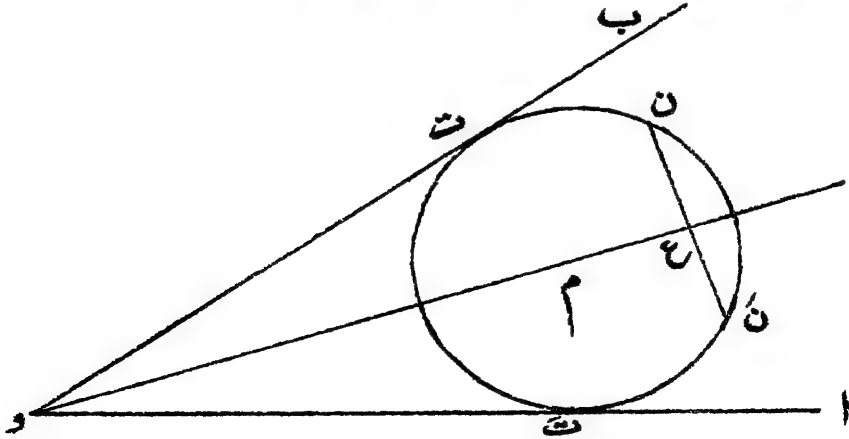


اور دو دیے ہوئے نقطوں ۱ اور ۲ میں سے جو لاما کی ایک ہی جانب واقع ہوں، گزرے۔
 تحلیل - فرض کرو کہ مطلوبہ دائرہ دیے ہوئے خط لاما کو نقطہ ت پر مس کرتا ہے۔ نیز فرض کرو کہ خط ب ۱ دیے ہوئے خط لاما کو نقطہ و پر قطع کرتا ہے۔

تب $وت = ۱ \times وب$ جو معلوم ہے
 اس لیے $وت$ معلوم ہو سکتا ہے اور اس کی مدد سے دیے ہوئے خط لاما اور مطلوبہ دائرہ کا نقطہ تماس حاصل ہوتا ہے۔ پس دائرہ ۱ ب ت مطلوبہ دائرہ ہے۔
 نوٹ - چونکہ خط لاما پر و کی دوسری جانب ایک اور نقطہ ت بھی ایسا لیا جاسکتا ہے کہ $وت = ۱ \times وب$ اس لیے ایک اور دائرہ ۱ ب ت کھینچ سکتا ہے جو دیے ہوئے شرائط کو پورا کرتا ہے۔

طالب علم اس تحلیل کی بنا پر عمل حاصل کرے اور ثبوت بہم پہنچائے۔

۲۔ مسئلہ عملی - ایک دائرہ کھینچنا جو دو دیے ہوئے متقاطع خطوط ۱ و ۲ کو مس کرے اور ایک دیے ہوئے نقطہ ن میں سے گزرے۔



تحلیل - فرض کرو کہ مطلوبہ دائرہ (م) ہے۔ چونکہ دائرہ (م) خطوط ۱ و ۲

اور وہ کو مس کرتا ہے، اس لیے اس کا مرکز ان خطوط کے درمیانی زاویہ کے منصف پر ہے۔

ن سے د م پر عمود ن ع نکالو اور اس کو اتنا خارج کرو کہ وہ دائرہ (م) سے گزرے۔

تب $ن ع = ع ن$ - پس ن معلوم ہو سکتا ہے۔

اور مطلوبہ دائرہ وہ دائرہ ہے جو نقطوں ن اور ن میں سے گزرتا ہے اور دیے ہوئے خطوط میں سے کسی ایک کو مس کرتا ہے۔

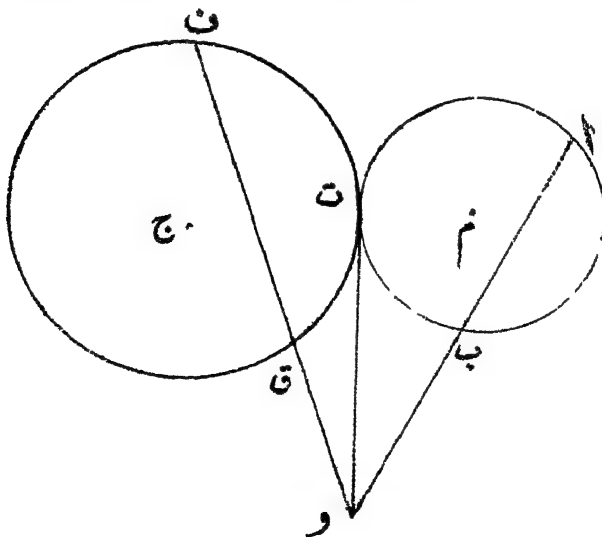
نوٹ (۱)۔ چونکہ دو ایسے دائرے کھینچ سکتے ہیں جو ن اور ن میں سے گزرتے ہیں اور دیے ہوئے خطوط میں سے ایک کو مس کرتے ہیں، اس لیے اس عملی مسئلہ کے دو حل ہیں۔

نوٹ (۲)۔ اس صورت پر غور کرو جبکہ دیے ہوئے خط متوازی ہوں۔

نوٹ (۳)۔ اگر دیا ہوا نقطہ ن منصف د م پر ہو تو عمل کی تشریح کرو۔

۳۔ مسئلہ عملی۔ ایک دائرہ کھینچنا جو ایک دیے ہوئے دائرہ

(ج) کو مس کرے اور دو دیے ہوئے نقطوں ۱ اور ب میں سے گزرے۔



تحلیل - فرض کرو کہ مطلوبہ دائرہ (م) ہے جو دیے ہوئے دائرہ (ج) کو ت پر مس کرتا ہے۔ فرض کرو کہ ت پر ان دائروں کا مشترک مماس خط اب سے و پر ملتا ہے۔

اب اگر و میں سے گزرنے والا کوئی خط دائرہ (ج) سے ف اور ق پر ملے تو $وق \times وف = و ت^2 = و ا \times و ب$

پس معلوم ہوا کہ 'ا'، 'ب'، 'ف'، 'ق' مشترک محیط نقطے ہیں۔
ترکیب - مندرجہ بالا تحلیل کی بنا پر مطلوبہ دائرہ کھینچنے کا عمل حسب ذیل حاصل ہوتا ہے۔

کوئی دائرہ کھینچو جو 'ا' اور 'ب' میں سے گزرے اور دیے ہوئے دائرہ (ج) کو ف اور ق پر قطع کرے۔ 'ا' اور 'ف' ق کے نقطہ تقاطع و میں سے دیے ہوئے دائرہ (ج) کا مماس و ت کھینچو۔

تب 'ا'، 'ب'، 'ت' میں سے گزرنے والا دائرہ دیے ہوئے شرائط کو پورا کرتا ہے طالب علم اس کا ثبوت خود بہم پہنچائے۔

نوٹ (۱) - دے دائرہ (ج) کا ایک اور مماس و ت بھی کھینچ سکتا ہے اس لیے ایک اور دائرہ 'ا' ب ت بھی ملتا ہے جو دیے ہوئے شرائط کو پورا کرتا ہے۔

نوٹ (۲) - ظاہر ہے کہ اس عملی مسئلہ کا حل صرف اس صورت میں ممکن ہے

جب کہ دیے ہوئے نقطے ۲ اور ب دونوں دائرہ (ج) کے اندر ہوں یا دونوں

باہر۔ اگر ایک نقطہ اندر ہو اور دوسرا باہر تو دیے ہوئے شرائط کو پورا کرنے والا دائرہ کھینچنا ناممکن ہے۔

مسئلہ ۱۹

(۱) ایک ربع دائرہ کے اندر جس کا نصف قطر ۴ سمر ہے ایک دائرہ بناؤ۔

اور اس دائرہ کا نصف قطر محسوب کرو [جواب ۲ (۱-۳۶) لچ]

(۲) ایک دائرہ کھینچو جو حوالہ کے دونوں (علی القوائم) محوروں کو مس کرے

اور نقطہ (۴، ۴) میں سے گزرے۔ بتاؤ کہ ایسے دو دائرے کھینچ سکتے ہیں۔ ان دائروں کے

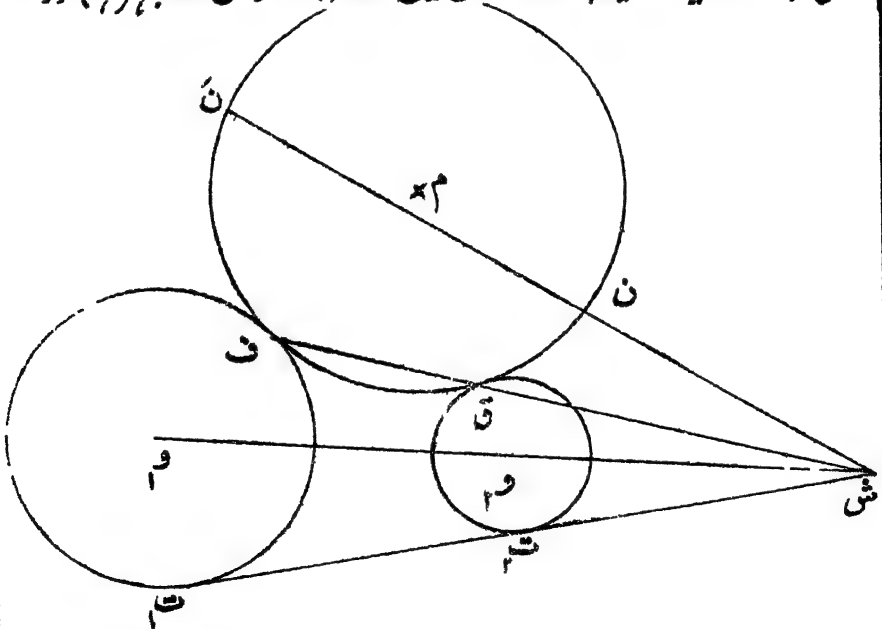
نصف قطر محسوب کرو۔ [جواب :- (۳۷ ± ۴) انچ]

(۳) ایک مساوی الاضلاع مثلث کے اندر تین دائرے بناؤ جن میں سے ہر ایک مثلث کے دو ضلعوں اور باقی دو دائروں کو مس کرے۔ دائرہ کے نصف قطر کا طول مثلث کے ضلع کے طول کی رقوم میں حاصل کرو۔ [جواب $\frac{۱-۳۷}{۴} \times ۱$]

(۴) ۵ سمر نصف قطر والے دائرے کے اندر تین دائرے بناؤ جن میں سے ہر ایک دیے ہوئے دائرہ کو اور نیز باقی دو دائروں کو مس کرے۔ اگر ان تین دائروں میں سے ایک کا نصف قطر ۵ سمر ہو تو ثابت کرو کہ $۱ + ۱۰$ قم $۵ =$

(۵) ایک دائرہ کھینچو جو دو دیے ہوئے خطوط کو مس کرے اور ایک دیے ہوئے دائرہ کو مس کرے۔

(۶) ایک دائرہ کھینچو جو دو دیے ہوئے دائروں (ف) اور (م) کو خارجاً مس کرے اور ایک دیے ہوئے نقطہ ن میں سے (جو دائروں کے باہر ہے) گزرے۔



[تحلیل - فرض کرو کہ مطلوبہ دائرہ (م) ہے جو دیے ہوئے دائروں کو

ف اور ق پرس کرتا ہے۔ خط ف ق مرکزوں کے خط دوپ سے سیدھی مشابہت کے مرکز ش پر ملتا ہے (دیکھو مسئلہ ۱۳ سوال ۳)۔ فرض کرو کہ دیے ہوئے دائروں کا ایک راست مشترک مماس ت ت ہے، یہ مماس سیدھی مشابہت کے مرکز ش میں سے گزرتا ہے

اور ش ف \times ش ق = ش ت \times ش ت (دیکھو مسئلہ ۱۳ سوال ۴)
فرض کرو کہ ش ن مطلوبہ دائرہ سے مکرر ن پر ملتا ہے۔

تب ش ن \times ش ن = ش ف \times ش ق = ش ت \times ش ت۔ اس لیے ن، ت، ت، ن مشترک المحيط ہیں۔ اس بناء پر نقطہ ن معلوم ہو سکتا ہے، پس وہ دائرہ جو معلومہ نقطوں ن اور ن میں سے گزرتا ہے اور دیے ہوئے دائروں میں سے کسی ایک کو خارجاً مس کرتا ہے دیے ہوئے شرائط کو پورا کرتا ہے۔
(۷) سوال بالا کی مدد سے ایک دائرہ کھینچو جو تین دیے ہوئے دائروں کو خارجاً مس کرے۔

(۸) ایک دائرہ کھینچو جو ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے گزرے، ایک دیے ہوئے دائرہ کو مس کرے اور ایک دیے ہوئے دائرہ کو علی القوائم قطع کرے۔
(۹) ایک دائرہ کھینچو جس کا مرکز ایک دیے ہوئے خط پر ہو، جو ایک دیے ہوئے دائرہ کو مس کرے اور ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے گزرے۔

بجھٹا باب

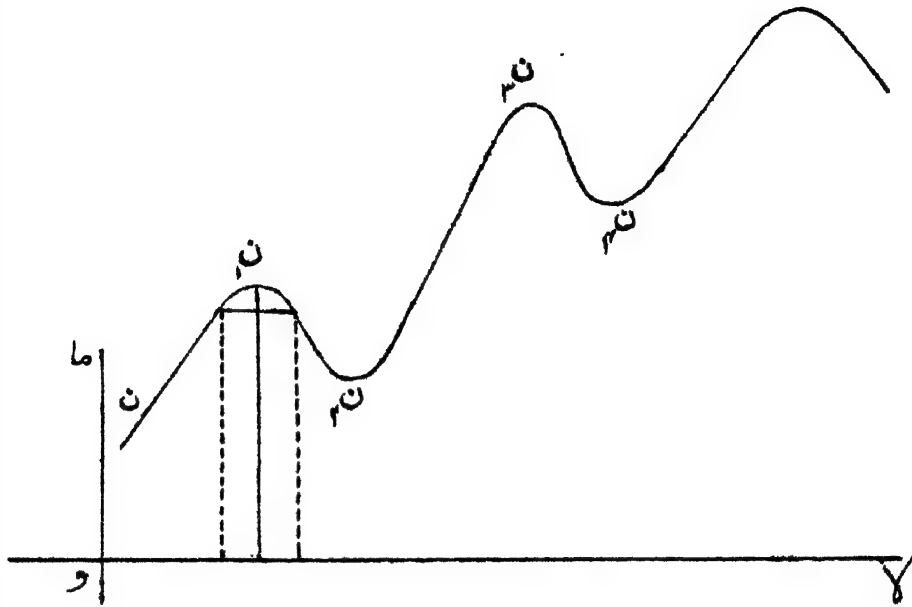
اعظم اقل

۷۴۔ جب کوئی ہندسی مقدار دیے ہوئے شرائط کے ماتحت مسلسل طور پر بدلتی ہے تو بعض اوقات یہ دریافت کرنا مطلوب ہوتا ہے کہ آیا اس تبدیلی کے دوران میں کوئی ایسے مقام ہیں جہاں یہ مقدار بڑھتے بڑھتے گھٹنا شروع ہوتی ہے یا گھٹتے گھٹتے بڑھنا شروع ہوتی ہے۔ اگر ایسے مقام ہوں تو اول الذکر نوعیت کے مقام کے لیے متغیر مقدار کی قیمت کو اعظم قیمت اور آخر الذکر نوعیت کے مقام کے لیے اُس کی قیمت کو اقل قیمت کہتے ہیں۔ بالفاظ دیگر اگر کسی متغیر مقدار کی قیمت کسی خاص مقام پر اعظم ہے تو اس مقام کے عین قرب میں متغیر مقدار کی تمام قیمتوں سے اعظم قیمت بڑی ہوگی۔ اسی طرح اگر متغیر مقدار کی قیمت کسی خاص مقام پر اقل ہے تو اُس مقام کے عین قرب میں متغیر مقدار کی تمام قیمتوں سے اقل قیمت چھوٹی ہوگی۔

صفحہ ۱۱ پر شکل میں نقطہ N کے عین کی تبدیلی پر غور کرو جب کہ نقطہ N مسطحی پر حرکت کرے۔ مقام N پر معین کا طول اعظم ہے کیونکہ اس مقام پر معین کی قیمت قرب و جوار کی تمام قیمتوں سے بڑی ہے اور اسی طرح N پر بھی معین اعظم ہے۔ نیز N اور N پر معین اقل ہے۔

واضح رہے کہ بالعموم اعظم قیمت سے مراد بڑی سے بڑی قیمت

نہیں ہوتی۔



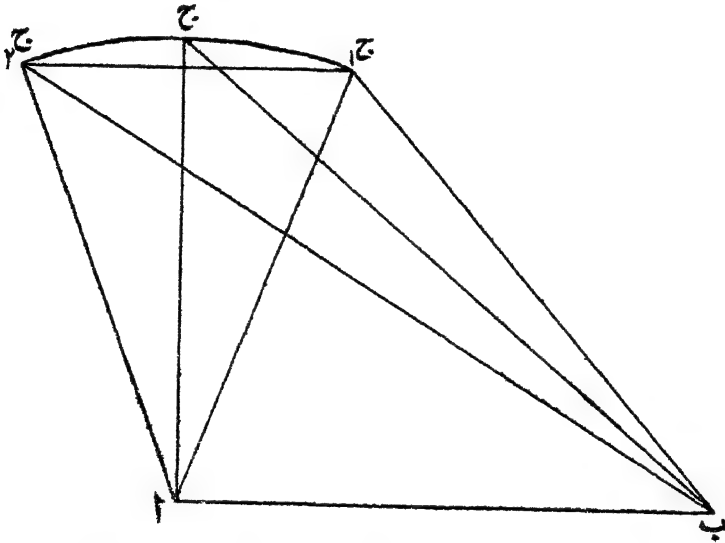
شکل بالا میں N پر معین اعظم ہے لیکن قیمت معین کی قیمتوں میں سب سے بڑی نہیں ہے۔ اسی طرح اقل کے لیے۔
اس باب میں ہم صرف ایسی تبدیلیوں پر غور کریں گے جن میں متغیر مقدار صرف ایک مرتبہ اعظم یا اقل قیمت اختیار کرتی ہے۔ ایسی صورتوں میں اعظم قیمت درحقیقت بڑائی سے بڑی قیمت ہے اور اقل قیمت چھوٹی سے چھوٹی۔
۵۔ بالعموم اعظم یا اقل قیمتوں کی تحقیق میں مندرجہ ذیل اشارے کارآمد ثابت ہوتے ہیں۔

(۱) مقدار متغیر کی دو مساوی قیمتوں کے درمیان کم از کم ایک اعظم یا اقل قیمت ہوگی جو شکل بالا سے واضح ہے۔
عملاً مقدار متغیر کی اعظم یا اقل قیمت یہ فرض کرنے سے دریافت کی جاتی ہے کہ اس مقام کے مخالف جانب قریب کے دو مقامات کے لیے متغیر مقدار کی قیمتیں مساوی ہیں اور بالآخر یہ مساوی قیمتیں اعظم یا اقل قیمت پر منطبق ہو جاتی ہیں۔

(۲) عموماً مقام تشاکل پر اعظم یا اقل قیمت واقع ہوتی ہے۔

۷۶۔ مسئلہ۔ اگر ایک مثلث کے دو ضلع دیے ہوئے ہوں تو مثلث

کا رقبہ اعظم ہوگا جب کہ ان ضلعوں کا درمیانی زاویہ قائمہ ہو۔
فرض کرو کہ مثلث ABC کے اضلاع AB ، BC دیے گئے ہیں۔
نیز فرض کرو کہ ضلع AB کا مقام ثابت ہے۔ تب BC کا طریق ایک دائرہ ہے
جس کا مرکز A ہے اور جس کا نصف قطر دیا ہوا ضلع BC ہے۔

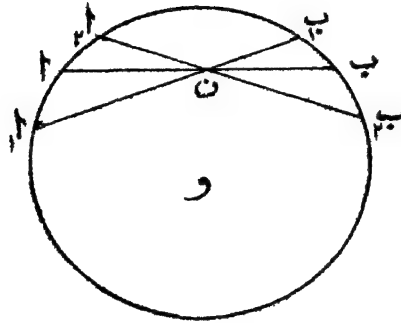


فرض کرو کہ A اس کے مقام BC کے لیے مثلث ABC کا رقبہ اعظم ہے۔
اس مقام کے مخالف جانب BC کے طریق پر دو قریب کے نقطے J اور K ایسے لو کہ
مثلثات ABC اور ABK کے رقبہ مساوی ہوں۔ تب JK // AB کے۔
جب BC اور JK دونوں ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں تو JK سے
گزرنے والا خط نقطہ J پر کاٹاں ہوگا اس لیے اگر $\triangle ABC$ کا رقبہ اعظم ہے
تو JK پر دائرہ (۱) کا ٹاس قاعدہ AB کے متوازی ہوگا
یعنی $\triangle ABC = قائمہ$ یہی ثابت کرنا تھا۔

نوٹ - $\triangle = \frac{1}{4}$ ب ج جب ا میں ب ج مستقل ہیں۔ اس لیے
 \triangle اعظم ہوگا جبکہ جب ا اعظم ہو۔
 یعنی ا = ۹۰ اور اعظم رقبہ = $\frac{1}{4}$ ب ج

۷۷۔ مسئلہ - ایک دیے ہوئے دائرہ (و) کے اندر کے ایک

نہایت نقطہ ن میں گزرنے والے تمام وتروں میں وہ وتر جس کی تنصیف نقطہ ن پر ہوتی ہے اقل ہے۔



فرض کرو کہ وتر ا ن ب کا طول اقل ہے۔

نیز فرض کرو کہ اس کے مخالف جانب دو قریب کے اور مساوی طول والے
 وتر ا ن ب، ا م ن ب ہیں۔

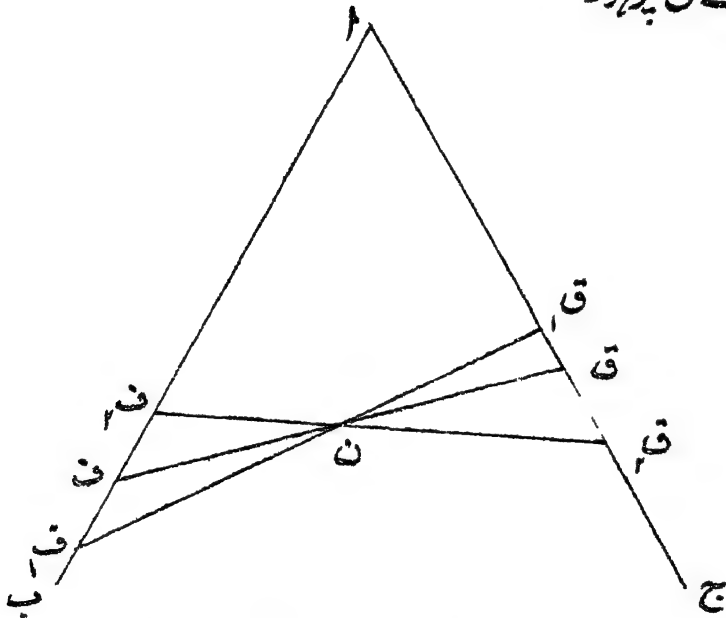
چونکہ ا ب م = ا م ب
 اس لیے قطعہ ا م ب کا رقبہ = قطعہ ا م ب کا رقبہ

یعنی $\triangle ا ن ا م = \triangle ا م ن ب$
 لیکن ان مثلثات کے مشترک رأس ن پر کے زاویے مساوی ہیں

اس لیے $ا ن ا م \times ن ب = ا م ن ب \times ن ب$
 انتہا میں نقاط ا اور ا م دونوں ا پر منطبق ہوتے ہیں اور ب اور ب
 دونوں ب پر

اس لیے $n^2 = n \cdot b^2$ یعنی $n = 1$ $n \cdot b$ یعنی اقل وتر ab کی تنصیف دیے ہوئے نقطہ n پر ہوتی ہے۔ یہی ثابت کرنا تھا۔
 مشتق۔ شکل بالا میں ثابت کرو کہ وتر an b دائرہ سے اقل رقبہ والا قطعہ بنیتر اور اعظم رقبہ والا قطعہ کبیر قطع کرتا ہے۔

۷۸۔ دو متقاطع خطوط ab ، ac دیے گئے ہیں۔ اور $b > c$ ab ac کے اندر ایک ثابت نقطہ n ہے۔ اگر n میں سے گزرنے والا کوئی خط خطوط ab ، ac سے f اور q پر ملے تو مثلث fna کا رقبہ اقل ہوگا جبکہ f q کی تنصیف n پر ہو۔

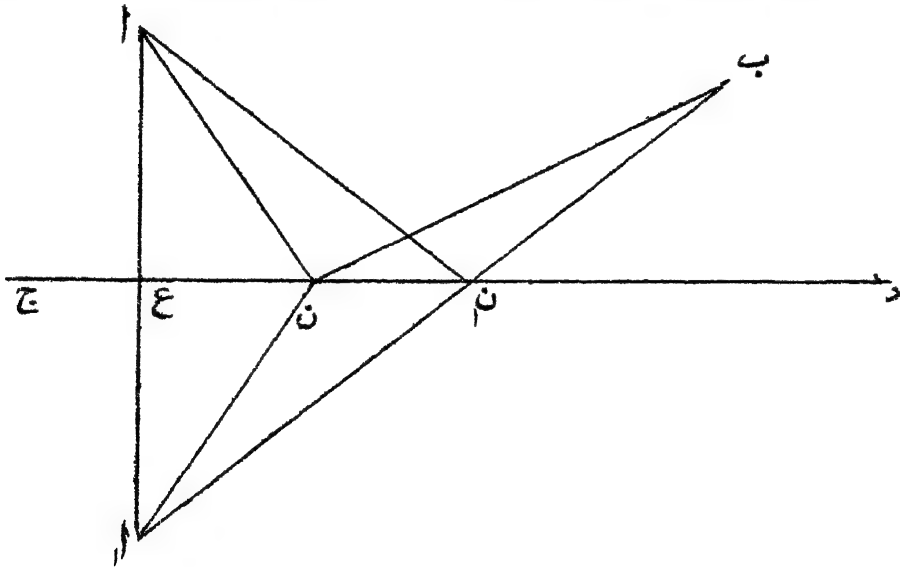


فرض کرو کہ $\triangle afq$ کا رقبہ اقل ہے۔ f q کے مخالف جانب n میں سے گزرنے والے دو قریب کے خط fna اور qna fna qna ایسے دو کہ مثلث fna کا رقبہ = مثلث qna کا رقبہ
 تب مثلث fna qna = مثلث fna qna اور ان مثلثات کے مشترک رأس n پر کے زاویے مساوی ہیں۔
 اس لیے $fna \times qna = fna \times qna$ اور انہما میں جب

ف ق اور ف ق دونوں خط ف ق پر منطبق ہوتے ہیں تو
 $ن ق = ن ق$ یعنی $ن ف = ن ق$ ۔ یہی ثابت کرنا تھا۔
 ۷۹۔ ذیل میں اعظم اقل قیمتوں کی تحقیق کے خالص ہندسی طریقوں
 کی تشریح کی جائیگی۔

مسئلہ۔ اگر ایک لامحدود خط ج د کی ایک ہی جانب کے
 دو ثابت نقطوں ا اور ب کو خط پر کے کسی نقطہ ن سے ملایا جائے تو
 ا ن اور ب ن کا مجموعہ اقل ہوگا جبکہ یہ خطوط دیے ہوئے خط ج د کے ساتھ
 مساوی زاویے مخالف سمتوں میں بنائیں۔

ا سے ج د پر عمود ا ع نکالو اور ا ع مدد وہ پر نقطہ ا ایسا کو کہ $ا ع = ا ج$



ا ب کو ملاؤ جو ج د کو ن پر قطع کرے۔
 ج د پر کوئی نقطہ ن لو ا ن، ب ن اور ا ن کو ملاؤ۔
 ثابت کرو کہ (۱) $ا ن = ا ن$
 (۲) $ا ن + ب ن = ا ب$
 (۳) $ا ن + ج > = ب ن > د$

\angle ان ب = \angle ا ف ب جو برابر ہے \angle ان ب سے۔ یہی ثابت کرنا تھا۔
 نوٹ۔ ۱۔ ب میں سے گزرنے والے اور خط ج د کو مس کرنے والے دو دائرے
 کھینچ سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ دوسرا دائرہ خط ج د کو ن پر مس کرتا ہے اس صورت
 میں بھی \angle ان ب اعظم ہوگا۔ پس \angle ان ب کی دو اعظم قیمتیں ہیں جو
 ن کے مقامات ن اور ن کے لیے حاصل ہوتی ہیں واضح ہو کہ بالعموم یہ دو قیمتیں
 مساوی نہ ہوں گی۔ اگر ب ۱، ج د سے لاپرلے تو متحرک نقطہ ن کے مقام لا کے لیے
 \angle ان ب کی قیمت صفر ہے، جو زاویہ ان ب کی اقل قیمت ہے۔
 پس ضمناً معلوم ہوا کہ دو اعظم قیمتوں کے درمیان کم از کم ایک اقل قیمت
 واقع ہوتی ہے۔

۸۱۔ ذیل میں اعظم اقل قیمتوں کی تحقیق کے چند ایسے مسائل درج کیے
 جاتے ہیں جو جبریہ متماثلات کی مدد سے آسانی حاصل ہوئے ہیں۔
مسئلہ۔ اگر ایک دیے ہوئے محدود خط اب پر کوئی نقطہ ن
 ہو تو \angle ان \times \angle ن ب اعظم ہوگا جبکہ ن وسطی نقطہ ہو اب کا۔

فرض کرو کہ \angle ان = لا اور \angle ن ب = ما
 از روئے سوال لا + ما مستقل ہے

اب ذیل کے متماثلہ پر غور کرو \angle لا ما = \angle (لا + ما) -- \angle (لا - ما)^۲
 ہمیں لا ما کی اعظم قیمت معلوم کرنا ہے اس صورت میں \angle لا ما بھی اعظم ہوگا۔
 چونکہ اوپر کے متماثلہ میں \angle (لا + ما) مستقل ہے، اس لیے \angle لا ما اعظم ہوگا
 جبکہ \angle (لا - ما) (جو منفی نہیں ہو سکتا) اپنی چھوٹی سے چھوٹی قیمت یعنی قیمت صفر اختیار کرے۔
 یعنی جبکہ لا = ما

یعنی \angle ان = \angle ن ب یہی ثابت کرنا تھا۔

۸۲۔ **مسئلہ۔** اگر ایک دیے ہوئے محدود خط اب پر کوئی

نقطہ ن ہو تو \angle ان + \angle ن ب اقل ہوگا جبکہ ن وسطی نقطہ ہو اب کا۔

فرض کرو کہ \angle ان = لا اور \angle ن ب = ما
 از روئے سوال لا + ما مستقل ہے

اب ذیل کے متماثلہ پر غور کرو۔

$$۲ (لا + ما) = (لا + ما) + (لا - ما)$$

بائیں جانب میں $(لا + ما)$ مستقل ہے اور $(لا - ما)$ منفی نہیں ہو سکتا ہے اس لیے $۲ (لا + ما)$ کی قیمت چھوٹی سے چھوٹی ہوگی جبکہ بائیں جانب کی دوسری رقم $(لا - ما)$ اپنی چھوٹی سے چھوٹی قیمت صفر اختیار کرے یعنی جبکہ $لا = ما$ یعنی $۱۱ = ۱۱$ جو ثابت کرنا تھا۔

امثلہ ۲

(۱) ایک دیے ہوئے ثابت نقطہ سے ایک دیے ہوئے ثابت خط تک خطوط کھینچے گئے ہیں ثابت کرو کہ ان خطوط میں سے سب سے چھوٹا خط وہ ہے جو دیے ہوئے خط پر عمود ہے۔

(۲) ایک دیے ہوئے نقطہ سے ایک دیے ہوئے دائرہ کے محیط تک کھینچے ہوئے خطوط میں سب سے بڑے اور سب سے چھوٹے وہ خط ہیں جو دائرہ کے مرکز میں سے گزرتے ہیں۔

(۳) ثابت کرو کہ دائرہ کا بڑے سے بڑا وتر اس کا قطر ہے۔

(۴) مستقل محیط والے مستطیلوں میں سب سے بڑے رقبہ والا مستطیل مربع ہے۔

(۵) ایک مثلث کا قاعدہ اور راسی زاویہ معلوم ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث کا رقبہ اعظم ہوگا جبکہ مثلث متساوی الساقین ہو۔

(۶) مستقل رقبہ والے مستطیلوں میں سب سے چھوٹے احاطہ والا مستطیل مربع ہے۔

(۷) مستقل رقبہ والے مستطیلوں میں سب سے چھوٹے وتر والا مستطیل مربع ہے۔

(۸) ثابت کرو کہ ان سب مثلثوں میں جن کا قاعدہ اور رقبہ معلوم ہیں مثلث

متساوی الساقین کا محیط اقل ہے۔

(۹) دو سیدھی پٹریاں ایک دوسرے پر علی القوائم ہیں اور ایک سیدھی سلاح

ان کے درمیان پھسلتی ہے بتاؤ کہ پھسلنے والی سلاح کے کس مقام کے لیے پٹریوں اور سلاح سے بننے والے مثلث کا رقبہ اعظم ہے۔

(۱۰) ثابت کرو کہ ایک دیے ہوئے دائرہ کے اندر بنے ہوئے مثلثوں میں سب سے بڑے رقبہ والا مثلث مساوی الاضلاع ہے۔

(۱۱) ایک پل کی تین کمانیں ہیں جن میں سے ہر ایک کا عرض ۵۰ فٹ ہے بتاؤ کہ پل سے کتنے فاصلہ پر کسی ایک کنارے پر وہ نقطہ ہے جہاں درمیانی کمان کے محاذی اعظم زاویہ بنتا ہے۔ [جواب ۵۰ ۴۴ فٹ]

(۱۲) اُن تمام مثلثوں میں جو ایک دیے ہوئے دائرہ کے اندر بن سکتے ہیں مثلث مساوی الاضلاع کا محیط اعظم ہے۔

(۱۳) اُن تمام مثلثوں میں جو ایک مثلث کے اندر بن سکتے ہیں مثلث پائین کا احاطہ اقل ہے۔

(۱۴) ایک مثلث کا قاعدہ اور راسی زاویہ معلوم ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث کے باقی دو ضلعوں پر کے مربعوں پر کا مجموعہ اعظم ہوگا جبکہ مثلث قساوی الساقین ہو۔

(۱۵) ایک دائرہ کے باہر دو نقطے A اور B ہیں اور دائرہ پر کوئی نقطہ N ہے ثابت کرو کہ $AN + BN$ اقل ہوگا جبکہ یہ خطوط N پر کے تماس کے ساتھ مساوی زاویے بنائیں۔

(۱۶) مثال بالا کی مدد سے ایک دیے ہوئے مثلث ABC (جس کے سب زاویے حادہ ہیں) کے اندر ایک نقطہ N ایسا معلوم کرو کہ $AN + BN + CN$ اقل ہو۔ (۱۷) ایک ذواربعتہ الاضلاع کے چاروں ضلعے بلحاظ طول اور ترتیب دیے گئے ہیں ثابت کرو کہ ذواربعتہ الاضلاع کا رقبہ اعظم ہوگا جبکہ ذواربعتہ الاضلاع مشترک المحيط ہو۔

ساتواں باب

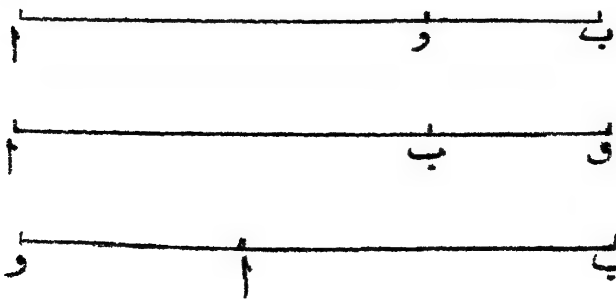
چلیبی نسبت، موسیقی صفا اور موسیقی پیل

۸۴ - جدید علم ہندسہ میں ایک خط مستقیم پر طولوں کی پیمائش میں سمت پیمائش کو بھی ملحوظ رکھا جاتا ہے۔ اگر ایک سمت میں ناپے ہوئے فاصلوں کو مثبت قرار دیا جائے تو مخالف سمت میں ناپے ہوئے فاصلوں کو منفی قرار دیا جائیگا۔ پس اگر خط پر ۱ اور ب دو نقطے ہوں تو $ا ب = - ب ا$ اور $ب ا = - ا ب$ جس سے حاصل ہوتا ہے کہ $ا ب + ب ا = ۰$ ۔ اگر ایک خط مستقیم پر تین نقطے ۱، ب، ج ہوں تو

$$ا ب + ب ج = ا ج \quad \text{اور} \quad ا ب + ب ج + ج ا = ۰$$

نیز اگر دو نقطوں ۱ اور ب میں سے گزرنے والے خط پر کوئی نقطہ دے تو

$$و ب - و ا = ا ب$$



۸۴۔ مسئلہ - اگر خط مستقیم کا وسطی نقطہ م ہو اور خط پر کوئی نقطہ و ہو تو $۲ و م = ۱ و + و ب$



ثبوت - چونکہ $۱ م = م ب$

اس لیے $۲ و م = ۱ و + و ب$

اس لیے $۲ و م = ۱ و + و ب$

۸۵۔ تعریف - متعدد ہم خط نقطوں کو نقطوں کی صف کہتے ہیں۔

مسئلہ - اگر 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' چار نقطوں کی ایک صف ہو تو

$$ا ب \times ج د + ب ج \times ا د + ج ا \times ب د = ۰$$



$$ا ب \times ج د + ب ج \times ا د + ج ا \times ب د$$

$$= ا ب (ا د - ا ج) + ا ج (ا ب - ا د) + ا د (ا ج - ا ب) = ۰$$

نوٹ - یہ مسئلہ درست رہیگا خواہ 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' ایک خط پر کسی ترتیب میں لیے جائیں۔

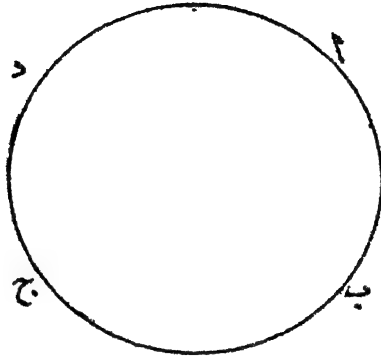
۸۶۔ تعریف - اگر 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' چار نقطوں کی ایک صف ہو تو

نسبت $\frac{ا ب \times ج د}{ا د \times ج ب}$ کو صف ا ب ج د کی چلیپی نسبت کہتے ہیں

اور اس کی قیمت کو علامت (ا ب ج د) سے تعبیر کرتے ہیں۔

نوٹ - صف ا ب ج د کی چلیپی نسبت کو لکھنے اور یاد رکھنے کے لیے

ایک وارہ پر نقاط 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' کو سلسلہ وار سمت ساعت میں لکھو شمار کنندہ حاصل کرنے کے لیے اسے شروع کر کے حروف کو سمت ساعت میں لکھو



اور نسب نما حاصل کرنے کے لیے ا سے شروع کر کے حروف کو مخالف سمتِ ساعت میں لکھو۔

۸۷۔ مسئلہ۔ اگر (ا ب ج د) = (ا ب ج ع) تو نقاط د اور ع ایک دوسرے پر منطبق ہونگے۔

چونکہ (ا ب ج د) = (ا ب ج ع)

$$\frac{ا ب \times ج د}{د ج \times ب} = \frac{ا ب \times ج ع}{ع ج \times ب}$$

$$\frac{ج د}{د} = \frac{ج ع}{ع} \quad \text{یعنی}$$

$$\frac{ج د}{د} = \frac{ج ع}{ع} \quad \text{یعنی}$$

یعنی ج ا کی تقسیم ایک ہی نسبت میں نقاط د اور ع پر ہوتی ہے اس لیے ضروری ہے کہ د اور ع ایک دوسرے پر منطبق ہوں۔

امثلہ ۱۱

(۱) ا ب کا وسطی نقطہ ج ہے اور ا ب پر کوئی اور نقطہ ن ہے، ثابِت کر دو کہ

$$(۱) \text{ ان } \times \text{ ب } + \text{ ج } \times \text{ ب } = \text{ ج } \times \text{ ن}$$

$$(ب) \text{ ا } \times \text{ ب } + \text{ ب } \times \text{ ن } = \text{ ا } \times \text{ ج } + \text{ ج } \times \text{ ن}$$

(۲) ا ب کا وسطی نقطہ ج ہے اور ا ب مدودہ پر کوئی نقطہ د ہے

ثابت کرو کہ $\text{ا ج} \times \text{ا د} = \text{ج ب} \times \text{ب د} + \text{ب} \times \text{ج}$ (۳) ثابت کرو کہ
(۳) 'ا' 'ب' 'ج' 'ن' کوئی چار ہم خط نقطے ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$\text{ن} \times \text{ا} \times \text{ب ج} + \text{ن} \times \text{ب} \times \text{ا ج} + \text{ا} \times \text{ب} \times \text{ج ن} + \text{ب} \times \text{ج} \times \text{ا ج} = \text{ا ب} \times \text{ج} = \text{ا ب} \times \text{ج} = ۰$$

(۴) اگر (ا ب ج د) = لہ، تو

ثابت کرو کہ (ا ب ج د) کی قیمت نہیں بدلتی جبکہ کسی دو حروف کو باہم بدلا جائے اور ساتھ ہی باقی دو حروف کو بھی باہم بدلا جائے یعنی

$$(ا ب ج د) = (ب ا د ج) = (ج د ا ب) = (د ج ب ا) = لہ$$

(۵) ثابت کرو کہ پہلے اور تیسرے حروف کو باہم بدلنے سے یا دوسرے

اور چوتھے حروف کو باہم بدلنے سے چلیپی نسبت کی قیمت الٹ جاتی ہے یعنی

$$(ا د ج ب) = (ب ج د ا) = (ج ب ا د) = (د ا ب ج) = \frac{۱}{لہ}$$

(۶) ثابت کرو کہ دوسرے اور تیسرے حروف کو باہم بدلنے سے یا پہلے

اور چوتھے حروف کو باہم بدلنے سے چلیپی نسبت کی قیمت ۱- لہ ہو جاتی ہے یعنی

$$(ا ج ب د) = (ب د ا ج) = (ج ا د ب) = (د ب ج ا) = ۱ - لہ$$

اشارہ - چونکہ $\text{ا ب} \times \text{ج د} + \text{ج ب} \times \text{ا د} + \text{ا ج} \times \text{ب د} = ۰$

$$\text{اس لیے } \frac{\text{ا ب} \times \text{ج د}}{\text{ا د} \times \text{ج ب}} + ۱ - \frac{\text{ج ب} \times \text{ا د}}{\text{ا د} \times \text{ج ب}} = ۰$$

$$\text{اس لیے } ۱ - لہ = \frac{\text{ج ا} \times \text{ب د}}{\text{ا د} \times \text{ج ب}} = \frac{\text{ا ج} \times \text{ب د}}{\text{ا د} \times \text{ج ب}} = (ا ج ب د)$$

اسی طرح سے باقی کی تین چلیپی نسبتوں کے لیے بھی۔

(۷) ثابت کرو کہ

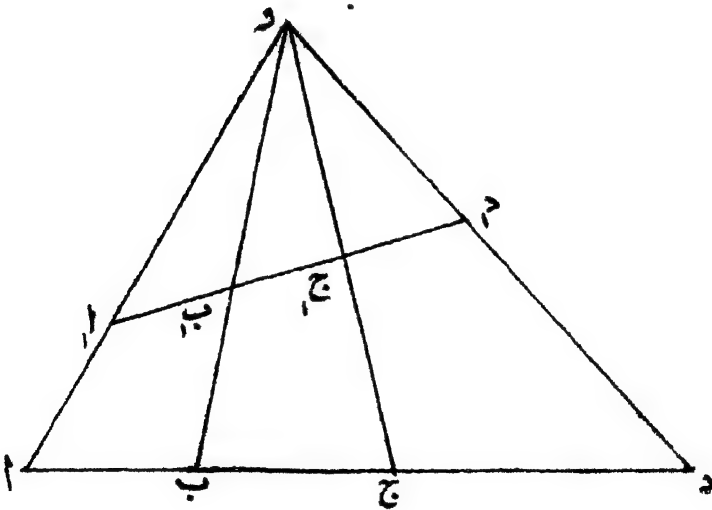
$$(۱) (ا د ب ج) = (ب ج ا د) = (ج ب د ا) = (د ا ب ج) = \frac{۱}{۱ - لہ}$$

$$(ب) (ا ب د ج) = (ب ا ج د) = (ج د ب ا) = (د ج ا ب) = ۱ - \frac{۱}{لہ}$$

(ج) (ا ج د ب) = (ب د ج ا) = (ج ا ب د) = (د ب ا ج) = $\frac{1}{2}$
 (۸) ثابت کرو کہ چار ہم خط نقطوں 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' کو مختلف ترتیبوں میں
 لینے سے ۲۴ چلیبی نسبتیں حاصل ہوتی ہیں جن سے چار چار مساوی القیمت چلیبی نسبتوں کے
 چھ سٹ (Set) بنتے ہیں۔

۸۸ - تعریفات - متعدد متراکز خطوں کو خطوں کی پنسل کہتے ہیں۔
 اور پنسل کے ہر خط کو شعاع کہتے ہیں اور پنسل کی شعاعوں کے نقطہ تراکز کو پنسل کا رأس
 کہتے ہیں۔

پنسل کی شعاعوں کو کاٹنے والے کسی خط کو پنسل کا قاطع کہتے ہیں۔
 مسئلہ - اگر چار شعاعوں 'د'، 'ب'، 'ج'، 'ا' سے بننے والی ایک پنسل
 دو قاطع بالترتیب نقاط 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' اور 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' پر قطع کریں تو (ا ب ج د) = (ا ب ج د)۔



$$\frac{\Delta ا ب \times \Delta ا ج \times \Delta ب ج}{\Delta ا د \times \Delta ب د \times \Delta ج د} = \frac{ا ب \times ج د}{ا د \times ب ج} = (ا ب ج د)$$

$$\frac{\frac{1}{ا} \times \frac{1}{ب} \times \frac{1}{ج} \times \frac{1}{د} \times \frac{1}{ا} \times \frac{1}{ب} \times \frac{1}{ج} \times \frac{1}{د}}{\frac{1}{ا} \times \frac{1}{ب} \times \frac{1}{ج} \times \frac{1}{د} \times \frac{1}{ا} \times \frac{1}{ب} \times \frac{1}{ج} \times \frac{1}{د}} =$$

جہاں زاویوں کی علامتوں کو بھی ملحوظ رکھا گیا ہے۔

$$\frac{\text{جب اوب} \times \text{جب ج ود}}{\text{جب اود} \times \text{جب ج وب}} =$$

$$\frac{\text{جب اوب} \times \text{جب ج ود}}{\text{جب اود} \times \text{جب ج وب}} = (\text{ا ب ج د})$$

چونکہ پیشل کے قاطعوں کے تمام مقامات کے لیے

$$\frac{\text{جب اوب} \times \text{جب ج ود}}{\text{جب اود} \times \text{جب ج وب}} = \frac{\text{جب اوب} \times \text{جب ج ود}}{\text{جب اود} \times \text{جب ج وب}}$$

اس لیے ثابت کرو کہ (ا ب ج د) = (ا ب ج د)

نوٹ (۱) یہ طریقہ اُن صورتوں پر بھی حاوی ہے جبکہ قاطع، پیشل کی ایک یا ایک سے زیادہ محدودہ شعاعوں کو قطع کرے۔ قاطع کے مختلف مقامات کے لیے طالب علم مناسب شکلیں کھینچ کر ثبوت ہم پہنچائے۔

نوٹ (۲) - مسئلہ بالا میں یہ ثابت ہوا کہ اگر چار شعاعوں 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' سے بننے والی پیشل کو کوئی قاطع نقاط 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' پر قطع کرے تو صنف ا ب ج د کی چلیپی نسبت قاطع کے مقام پر منحصر نہیں ہے بلکہ پیشل کی شعاعوں کے درمیانی زاویوں پر منحصر ہے۔ اس مستقل چلیپی نسبت کو پیشل کی چلیپی نسبت کہتے ہیں اور اسے علامت (ا ب ج د) سے تعبیر کرتے ہیں۔

۸۹۔ تعریفات - اگر ایک خط مستقیم ا ج کی داخلی اور خارجی تقسیم ایک ہی نسبت میں ب اور د پر کی جائے [یعنی اگر $\frac{ا ب}{ب ج} = \frac{ا د}{د ج}$] تو یوں کہا جاتا ہے کہ

ا ————— ب ————— ج ————— د

ا ج کی موسیقی تقسیم ب اور د پر ہوئی ہے (دیکھو دفعہ ۲۱) اور صنف ا ب ج د کو موسیقی صنف کہتے ہیں نیز نقاط ا اور ج کے لحاظ سے نقاط ب اور د ایک دوسرے کے موسیقی جزو ج کہلاتے ہیں

$$\frac{\text{ا ب} \times \text{ج د}}{\text{ب ج} \times \text{د ا}} = \text{موسیقی صنف ا ب ج د کی چلیپی نسبت}$$

$$= \frac{\text{ا ب}}{\text{ب ج}} \div \frac{\text{ا د}}{\text{د ج}} = ۱ -$$

پس صف اب ج د موسیقی صف ہوگی اگر اُس کی چلیپی نسبت (اب ج د) = ۱-
یعنی وہ صف جس کی چلیپی نسبت - ۱ کے مساوی ہے موسیقی صف ہے۔
یہ ظاہر کرنے کے لیے کہ ا اور ج کے لحاظ سے ب اور د ایک دوسرے کے
موسیقی فروج ہیں موسیقی صف اب ج د کو (اج، ب د) = ۱- سے بھی تعبیر
کرتے ہیں۔

۹۰۔ مسئلہ۔ اگر (اج، ب د) = ۱- تو (د ب، ج ا) = ۱-

د ج ب ا

$$\frac{ا د}{د ج} = \frac{ب ا}{ج ب}$$

اس لیے تبدیل نسبت سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{ا د}{ب ا} = \frac{د ج}{ج ب}$$

$$\frac{ا د}{ب ا} = \frac{د ج}{ج ب} \quad \text{یعنی}$$

یعنی (د ب، ج ا) = ۱-

۹۱۔ مسئلہ۔ اگر (اب ج د) = ۱- تو اب، ج ا، د کے طول موسیقی
سلسلہ میں ہونگے۔

چونکہ (اب ج د) = ۱-

$$\frac{ا ب \times ج د}{د ج \times ب ا} = ۱-$$

$$\frac{ا ب (ا د - ا ج)}{ا د (ا ب - ا ج)} = ۱- \quad \text{یعنی}$$

یعنی اب × ا د - اب × ا ج = ا د × ا ب - ا د × ا ج
طرفین کو اب × ا ج پر تقسیم کرنے سے

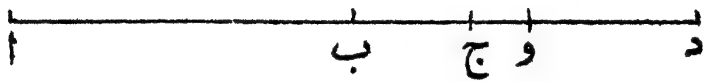
$$\frac{ا}{ا ب} + \frac{ا}{ا ج} = \frac{ا}{ا د} - \frac{ا}{ا ج}$$

$$\text{یعنی } \frac{1}{ا} - \frac{1}{ب} = \frac{1}{ج} - \frac{1}{د}$$

$$\text{یعنی } \frac{1}{ا}، \frac{1}{ج}، \frac{1}{ب}، \frac{1}{د} \text{ سلسلہ حسابیہ میں ہیں۔}$$

یعنی طول اب، اج، اد موسیقی سلسلہ میں ہیں۔

۹۲۔ مسئلہ۔ اگر (اج، ب، د) = ۱ - اور ب د کا وسطی نقطہ
و ہو تو وا × وج = وب



چونکہ (اج، ب، د) = ۱ -

$$\text{اس لیے } \frac{ا}{ب} = \frac{ب}{ج} = ۱ -$$

$$\text{یعنی } \frac{وب - وا}{وج - وب} = \frac{ود - وا}{وج - ود}$$

$$\text{یعنی } \frac{وب - وا}{وج - وب} = \frac{وب + وا}{وج + وب} \text{ کیونکہ } ود = -وب$$

$$\text{یعنی } \frac{وج + وب}{وج - وب} = \frac{وب + وا}{وب - وا} \text{ (تبدیل نسبت)}$$

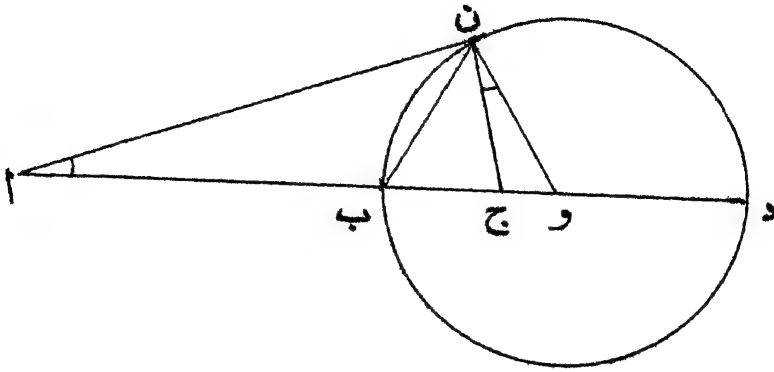
$$\text{یعنی } \frac{وج}{وب} = \frac{وب}{وا} \text{ (ترکیب و تفصیل نسبت)}$$

$$\text{یعنی } وا \times وج = وب$$

۹۳۔ مسئلہ۔ اگر (اج، ب، د) = ۱ - اور قطرب د پر

$$\text{کھینچے ہوئے دائرہ پر کوئی نقطہ ہو تو } \frac{ا}{ب} = \frac{ن}{ج}$$

فرض کر دو کہ ب د کا وسطی نقطہ دے
ن ا، ن ب، ن ج، ن د کو ملاؤ



سابقہ مسئلہ کی رُو سے

$$د ا \times د ج = و ب ا$$

$$و ن =$$

یعنی و ن ماس ہے \triangle ا ن ج کے حاکم دائرہ کا

$$(۱) \quad \text{یعنی } > و ن ج = > ن ا ب \dots\dots\dots (۱)$$

چونکہ و ب = و ن

اس لیے $> و ن ب = > د ب ن$

$$(۲) \quad \text{یعنی } > و ن ج + > ج ن ب = > ن ا ب + > ا ن ب \dots\dots (۲)$$

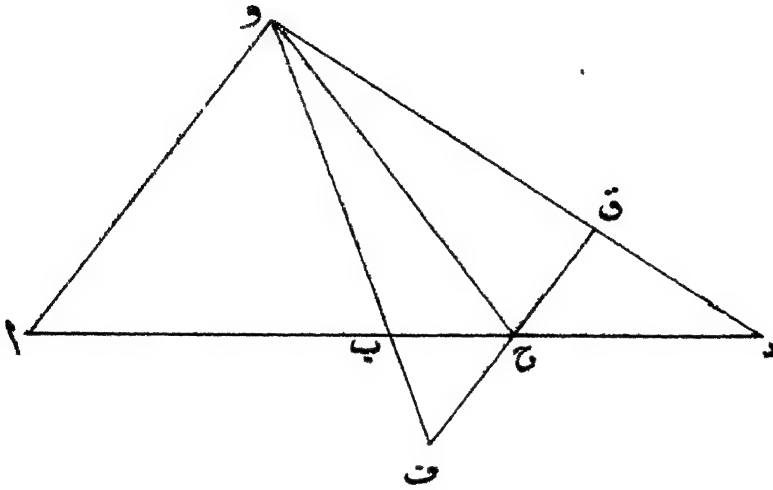
(۱) اور (۲) سے حاصل ہوتا ہے

$$> ج ن ب = > ا ن ب$$

یعنی ن ب داخلی منصف ہے $> ا ن ج$ کا

$$\text{اس لیے } \frac{ن ا}{ن ج} = \frac{ا ب}{ب ج} \text{، یہی ثابت کرنا تھا۔}$$

۹۴۔ مسئلہ۔ اب ج د ایک موسیقی صف ہے اس کے باہر کوئی نقطہ دے۔ اگر ج میں سے ایک خط ف ج ق خط و ا کے متوازی کھینچا جائے جو ب سے ف پر اور و د سے ق پر ملے تو ف ج = ج ق۔



تشابہ مثلثوں اب و اور ج ب ف میں

$$(۱) \dots\dots\dots \frac{ا ب}{ب ج} = \frac{ا و}{و ج}$$

نیز تشابہ مثلثوں ا د و اور ج د ق میں

$$(۲) \dots\dots\dots \frac{ا و}{و ج} = \frac{ا د}{ج د}$$

لیکن چونکہ اب ج د موسیقی صف ہے

$$(۳) \dots\dots\dots \frac{ا و}{و ج} = \frac{ا ب}{ب ج}$$

نتائج (۱) (۲) (۳) سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{١٠}{جق} = \frac{١٠}{فج}$$

فرض کرو کہ کوئی دوسرا قاطع خطوط د ا، ب، ج، د کو بالترتیب
نقاط ا، ب، ج، د پر قطع کرتا ہے۔

نقاط ج اور ج میں سے خطوط ف ج ق اور ف ج ق
خط د کے متوازی کھینچو۔

چونکہ (ا ب ج د) ایک موسیقی صنف ہے اس لیے ف ج = ج ق

اس لیے ف ج = ج ق کے عکس سے حاصل ہوتا ہے کہ ا ب ج د
اور دفعہ گذشتہ کے مسئلہ کے عکس سے حاصل ہوتا ہے کہ ا ب ج د

ایک موسیقی صنف ہے۔

تعریفات۔ اگر پنسل د (ا ب ج د) ایسی ہو کہ اُس کے ایک مخصوص

قاطع (اور اس لیے مسئلہ بالا کی رو سے اس کے ہر قاطع پر) ایک موسیقی صنف
حاصل ہوتی ہو تو ایسی پنسل کو موسیقی پنسل کہتے ہیں۔ اور شعاعوں ب، د کو بلحاظ
شعاعوں د، ج کے ایک دوسرے کی موسیقی ہمزاد ج شعاعیں کہتے ہیں۔

نوٹ (۱)۔ گذشتہ ترتیم کے اصول پر موسیقی پنسل د (ا ب ج د) کو

اس طرح ظاہر کرتے ہیں۔

د (ا ب ج د) = ا - یا د (ا ج ب د) = ا -

نوٹ (۲)۔ دفعہ ۸۸ کے مسئلہ کی رو سے (ا ب ج د) = (ا ب ج د)

اور چونکہ حسب مفروض (ا ب ج د) = ا - اس لیے ثابت ہوا کہ (ا ب ج د) = ا -
یہ مسئلہ بالا کا متبادل ثبوت ہے۔

تعریفات۔ ایسے چار خطوط متتقیم کے نظام کو جن میں سے کوئی تین

متراکز نہیں ہیں، مکمل ذواربۃ الاضلاع کہتے ہیں۔

یہ چار خطوط مکمل ذواربۃ الاضلاع کے ضلعے کہلاتے ہیں۔

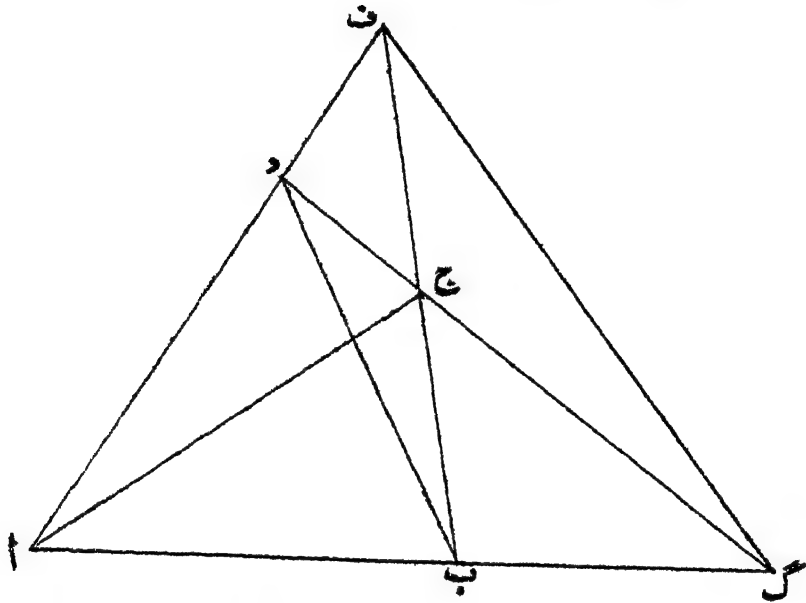
فرض کرو کہ ایک مکمل ذواربۃ الاضلاع کے ضلعے ا ب ج د د ا ہیں۔

تیز فرض کرو کہ ا ب اور ج د کا نقطہ تقاطع گ ہے اور ا د اور ب ج کا

نقطہ تقاطع ف ہے۔ پس مکمل ذواربۃ الاضلاع کے ضلعوں میں سے دو، دو کے

تقاطع سے چھ نقطے ا، ب، ج، د، ف، گ حاصل ہوتے ہیں۔ ان نقطوں کو

مکمل ذواربۃ الاضلاع کے چھ رؤس کہتے ہیں -



مقابل کے رؤسوں کو ملانے والے تین خطوط یعنی 'ا ج'، 'ب د' اور 'ف گ' کو مکمل ذواربۃ الاضلاع کے تین قطر کہتے ہیں -

۹۷۔ مسئلہ - مکمل ذواربۃ الاضلاع کے کوئی دو قطر تیسرے قطر

کی موسیقی تقسیم کرتے ہیں -

دفعہ گزشتہ کی ترقیم کے مطابق مکمل ذواربۃ الاضلاع کے قطر 'ا ج'، 'ب د' اور 'ف گ' ہیں -

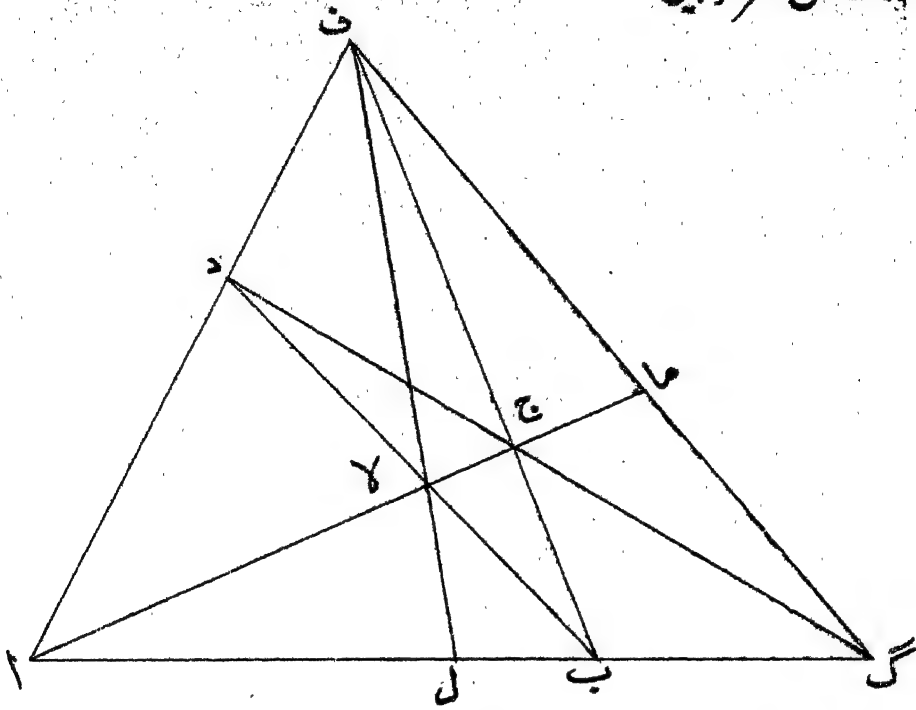
فرض کرو کہ قطر 'ا ج' کو دوسرے دو قطر 'ب د' اور 'ف گ' بالترتیب نقاط 'لا' اور 'ما' پر قطع کرتے ہیں -

ثابت کرنا ہے کہ 'ا'، 'لا'، 'ج'، 'ما' موسیقی صف ہے -

فرض کرو کہ 'ف'، 'لا' اور 'ب' کا نقطہ تقاطع 'ل' ہے -

شکلث 'ف ا ب' کے رؤسوں سے گزرنے والے خط 'ا ج'، 'ب د'

اور فل متراکز ہیں۔



اس لیے سیوا کے مسئلے

$$(۱) \dots\dots\dots ۱ + = \frac{ف د}{ا د} \times \frac{ب ج}{ج ف} \times \frac{ا ل}{ل ب}$$

نیز مثلث ف ا ب کے ضلعوں پر کے تین نقطے گ، ج، د ہم خط ہیں۔
اس لیے میدنی لاس کے مسئلے

$$(۲) \dots\dots\dots ۱ - = \frac{ف د}{د ا} \times \frac{ب ج}{ج ف} \times \frac{ا گ}{گ ب}$$

نتائج (۱) اور (۲) سے حاصل ہوتا ہے کہ

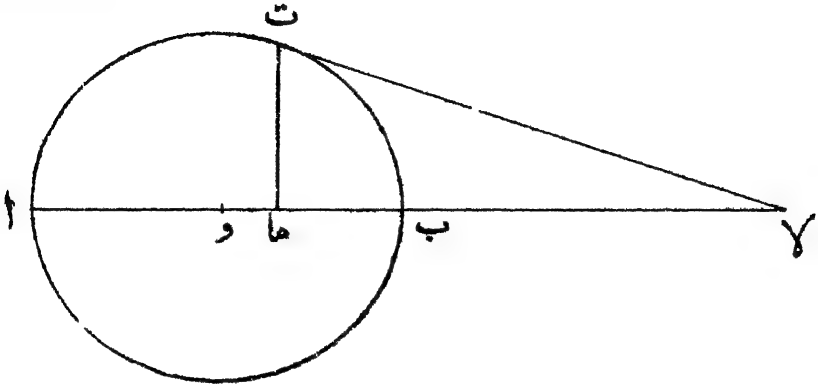
$$\frac{ا ل}{ل ب} - = \frac{ا گ}{گ ب}$$

یعنی ا ل ب گ موسیقی صفت ہے

اس لیے پنل ف (ا ب گ) موسیقی پنل ہے۔
اس لیے اس پنل کے قاطع ا ما پر موسیقی صفا ا لا ج ما حاصل ہوتی ہے
پس ثابت ہوا کہ مکمل ذوالربعۃ الاضلاع کے قطر ب د اور ف گ تیسرے قطر
ا ج کی موسیقی تقسیم کرتے ہیں۔
اسی طرح کے دوسرے دو قطروں ب د اور ف گ کے لیے بھی مسئلہ
ثابت ہو سکتا ہے۔

مشکل ۲۲

- (۱) خط ا ب کا وسطی نقطہ لا ہے، ا اور ب کے لحاظ سے نقطہ لا کا
موسیقی مزدوج کہاں ہے؟
- (۲) مثلث ا ب ج کے زاویہ ا کے منصف ا لا اور ا ما ہیں۔
ثابت کرو کہ ا (ب لا ج ما) موسیقی پنل ہے۔
- (۳) مثلث ا ب ج کے حاطہ دائرہ کا ایک طرف ق ضلع ب ج
پر عمود وار ہے ثابت کرو کہ ا (ق ب ف ج) موسیقی پنل ہے۔
- (۴) ا اور ب دو ثابت نقطے ہیں، ج د کوئی خط ہے جو ا ب کے
متوازی نہیں ہے ج د پر ایک نقطہ ن ایسا معلوم کرو کہ $\angle ا ن ب$ کا
ایک منصف خط ج د ہو۔
- (۵) ا ب ج ایک مثلث ہے اور ن ایک ثابت نقطہ ہے جو
مثلث کے اضلاع پر نہیں ہے۔ ن میں سے ایک خط کھینچو جو مثلث کے اضلاع
ا ب، ب ج، ج ا سے ایسے نقاط 'ق'، 'ر' پر ملے کہ (ن ق ر) = ا۔
- (۶) ا ب ج د ایک متوازی الاضلاع ہے، ب د کے متوازی ا ع
کھینچا گیا ہے ثابت کرو کہ ا (ب د ج ع) = ا۔
- (۷) ایک دائرہ کے قطر ا ب مدورہ پر کے کسی نقطہ لا سے دائرہ کا
ایک مماس لاتا کھینچا گیا ہے اور ت سے ا ب پر عمود ت ما ہے۔



ثابت کرو کہ لا ا اور لا ب کا حسابی اوسط لا و ہے، ہندی اوسط لات ہے اور موسیقی اوسط لا ما ہے۔

(۸) شکل بالا میں ثابت کرو کہ (ا ب، ما لا) = ۱ -

(۹) شکل بالا میں اگر لا سے گزرنے والا کوئی خط دائرہ و سے

ف اور ق پر اور ت ما سے ن پر ملے تو ثابت کرو کہ لا ف ن ق موسیقی صفا ہے۔

(۱۰) دو دائرے (۱) اور (۲) ایک دوسرے کو عمود وار قطع کرتے ہیں۔ اگر دائرہ (۱) کا کوئی قطر ا ب دائرہ (۲) سے ف اور ق پر ملے تو ثابت کرو کہ (ا ب، ف ق) = ۱ -

(۱۱) و (ا ب ج د) موسیقی پنسل ہے۔ اگر $\frac{ا ج}{و ج} > ۱$ قائمہ ہو تو دفعہ ۹۲ کی مدد سے ثابت کرو کہ $\frac{ب و د}{و د}$ کے نصف و ا، و ج ہیں۔ [مقابلہ کرو دفعہ ۹۳ کے ساتھ]

(۱۲) ایک خط پر تین نقطے 'ا'، 'ب'، 'ج' دیے گئے ہیں صرف پٹری کو استعمال کرنے سے دفعہ ۹۴ کی مدد سے اسی خط پر نقطہ د ایسا معلوم کرو کہ (ا ب ج د) = ۱ -

(۱۳) و ا، و ب، و ج تین دیے ہوئے خط ہیں۔ خط و د

ایسا کھینچ کر و (ا ب ج د) = ۱ -
 (۱۴) دو دائرے ایک دوسرے کو ب اور ج پر قطع کرتے ہیں اور
 ان دائروں کا ایک مشترک تماس دائروں کو ف اور ق پر مس کرتا ہے ب اور ج
 میں سے گزرتے والا کوئی دائرہ خط ف ق سے ل اور م پر ملتا ہے
 ثابت کرو کہ (ف ق ل م) = ۱ -

و

م

ی

اعلاط ناما

علم ہندسہ مستوی

صحیح	غلط	پہلا	دوسرا	صحیح	غلط	پہلا	دوسرا
راس	طوس	۱۲	۶۴	سکتی	سکتی	۸	۷
(ب + ج)	(ب + ج)	۱۰	۶۶	درسی	درسی	۲۰	۸
ر	ر	۲۵	۸۳	ہندسہ مستوی	ہندسہ مستوی	پیشانی	۱۲
تقلیب	آقلیب	۱۳	۹۳	۷۵	۷۵	۱۰	۳۱
نقطہ	نقطہ	۱۶	۹۷	ج	ج	شکل	۲۵
(م)	(م)	۶	۱۰۲	قسم	قسم	۱۲	۳۹
خطوط	خطوط	۹	۱۰۹	تتناظر	تتناظر	۲۰	۳۹
مس	مس	۹	۱۱۱	ب	ب	۳	۴۹
مقدار	مقدار	۱۰	۱۱۳	د	د	۲	۵۰
حادثہ	حادثہ	۱۶	۱۲۲	ع	ع	شکل	۵۳
رأس	رأس	۶	۱۳۷	س	س	۲	۶۰
ج	ج	شکل	۱۳۳	شکل میں خط	شکل میں خط	۲	۶۱
(م)	(م)	۱۶	۱۳۴	۲	۲	۵	۶۴

اعلاط ناما

علم ہندسہ مستوی

صحیح	غلط	پہلا	دوسرا	صحیح	غلط	پہلا	دوسرا
راس	طوس	۱۲	۶۴	سکتی	سکتی	۸	۷
(ب + ج)	(ب + ج)	۱۰	۶۶	درسی	درسی	۲۰	۸
ر	ر	۲۵	۸۳	ہندسہ مستوی	ہندسہ مستوی	پیشانی	۱۲
تقلیب	آقلیب	۱۳	۹۳	۷۵	۷۵	۱۰	۳۱
نقطہ	نقطہ	۱۶	۹۷	ج	ج	شکل	۲۵
(م)	(م)	۶	۱۰۲	قسم	قسم	۱۲	۳۹
خطوط	خطوط	۹	۱۰۹	تناظر	تناظر	۲۰	۳۹
مس	مس	۹	۱۱۱	ب	ب	۳	۴۹
مقدار	مقدار	۱۰	۱۱۳	د	د	۲	"
حادثہ	حادثہ	۱۶	۱۲۲	ع	ع	شکل	۵۳
رأس	رأس	۶	۱۳۷	س	س	۲	۶۰
ج	ج	شکل	۱۳۳	شکل میں خط	شکل میں خط	۴۱	۶۱
(م)	(م)	۱۶	۱۳۴	۲	۲	۵	۶۴

اعلاط ناما

علم ہندسہ مستوی

صحیح	غلط	پہلا	دوسرا	صحیح	غلط	پہلا	دوسرا
راس	طوس	۱۲	۶۴	سکتی	سکتی	۸	۷
(ب + ج)	(ب + ج)	۱۰	۶۶	درسی	درسی	۲۰	۸
ر	ر	۲۵	۸۳	ہندسہ مستوی	ہندسہ مستوی	پیشانی	۱۲
تقلیب	آقلیب	۱۳	۹۳	۷۵	۷۵	۱۰	۳۱
نقطہ	نقطہ	۱۶	۹۷	ج	ج	شکل	۲۵
(م)	(م)	۶	۱۰۲	قسم	قسم	۱۲	۳۹
خطوط	خطوط	۹	۱۰۹	تناظر	تناظر	۲۰	۳۹
مس	مس	۹	۱۱۱	ب	ب	۳	۴۹
مقدار	مقدار	۱۰	۱۱۳	د	د	۲	"
حادثہ	حادثہ	۱۶	۱۲۲	ع	ع	شکل	۵۳
رأس	رأس	۶	۱۳۷	س	س	۲	۶۰
ج	ج	شکل	۱۳۳	شکل میں خط	شکل میں خط	۴۱	۶۱
(م)	(م)	۱۶	۱۳۴	۲	۲	۵	۶۴

اعلاط ناما

علم ہندسہ مستوی

صحیح	غلط	پہلا	دوسرا	صحیح	غلط	پہلا	دوسرا
راس	طوس	۱۲	۶۴	سکتی	سکتی	۸	۷
(ب + ج)	(ب + ج)	۱۰	۶۶	درسی	درسی	۲۰	۸
ر	ر	۲۵	۸۳	ہندسہ مستوی	ہندسہ مستوی	پیشانی	۱۲
تقلیب	آقلیب	۱۳	۹۳	۷۵	۷۵	۱۰	۳۱
نقطہ	نقطہ	۱۶	۹۷	ج	ج	شکل	۲۵
(م)	(م)	۶	۱۰۲	قسم	قسم	۱۲	۳۹
خطوط	خطوط	۹	۱۰۹	تناظر	تناظر	۲۰	۳۹
مس	مس	۹	۱۱۱	ب	ب	۳	۴۹
مقدار	مقدار	۱۰	۱۱۳	د	د	۲	"
حادثہ	حادثہ	۱۶	۱۲۲	ع	ع	شکل	۵۳
رأس	رأس	۶	۱۳۷	س	س	۲	۶۰
ج	ج	شکل	۱۳۳	شکل میں خط	شکل میں خط	شکل	۶۱
(م)	(م)	۱۶	۱۳۴	۲	۲	۵	۶۴